Вычисление неопределенных интегралов

Методические указания к выполнению индивидуального задания №2
по Математическому анализу

При решении задач по вычислению неопределенных интегралов используются следующие положения (см. Лекции).

1) Определение неопределенного интеграла:

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$

C – константа;

2) Правила интегрирования:

а) $\int (f(x) + \varphi(x) + \cdots)dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx + \cdots$;

б) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, где A – константа;

в) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C ,$$

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C ,$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C ,$$

3) Таблица неопределенных интегралов элементарных функций:

а) $\int x^{\propto}dx = \frac{x^{\propto+1}}{\propto+1} + C \qquad (\propto \neq -1)$;

б) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

в) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

г) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

д) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$;

е) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$;

ж) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

и) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

к) $\int e^x dx = e^x + C$;

л) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

м) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

н) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;

о) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$;

п) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

р) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

с) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

4) Метод интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

5) Метод замены переменной:

(См. примеры 4 – 7)

6) Правила интегрирования рациональных дробей:

(См. примеры 10 – 11)

Пример 1. Найти неопределенный интеграл

$$\int (x^5 + 8x^4 - 3x + 2)dx$$

Решение.

Используем правила интегрирования 2а и 2б, а также табличный интеграл 3а:

$$\int (x^5 + 3x^4 - 7x + 2)dx = \int x^5 dx + \int 8x^4 dx - \int 3x dx + \int 2dx$$
$$= \int x^5 dx + 8\int x^4 dx - 3\int x dx + 2\int dx = \frac{x^6}{6} + 8\cdot\frac{x^5}{5} - 3\cdot\frac{x^2}{2} + 2x + C$$

Задача решена.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл

$$\int (x^2 + 2x)(x^4 - 3)dx$$

Решение.

Для удобства интегрирования предварительно раскроем скобки, получим в подынтегральной функции многочлен, а затем проведем интегрирование, как в примере 1:

$$\int (x^2 + 2x)(x^4 - 3)dx = \int (x^6 + 2x^5 - 3x^2 - 6x)dx = \int x^6 dx + 2\int x^5 dx - 3\int x^2 dx - 6\int x dx$$
$$= \frac{x^7}{7} + 2\cdot\frac{x^6}{6} - 3\cdot\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{3} - x^3 - 3x^2 + C$$

Задача решена.

Пример 3. Найти неопределенный интеграл

$$\int tg(3x-7)\,dx$$

Решение.

Используем правила интегрирования 2в, а также табличный интеграл 3д:

$$\int tg(3x-7)\,dx = -\frac{1}{3}\ln|\cos(3x-7)| + C$$

Задача решена.

Пример 4. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$$

Решение.

Используем метод замены переменной, сделав подстановку $t = \ln x$.

Тогда $dt = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$. В результате получим табличный интеграл, найдем его и сделаем обратную замену:

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \left|\begin{matrix}\text{замена}\\ t = \ln x\\ dt = \dfrac{1}{x}dx\end{matrix}\right| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

Задача решена.

Пример 5. Найти неопределенный интеграл

$$\int \cos^8 x \cdot \sin x\,dx$$

Решение.

Используем метод замены переменной, сделав подстановку $t = \cos x$.

Тогда $dt = (\cos x)'dx = -\sin x dx$. В результате получим табличный интеграл, найдем его и сделаем обратную замену:

$$\int \cos^8 x \cdot \sin x\,dx = \left|\begin{matrix}\text{замена}\\ t = \cos x\\ dt = -\sin x dx\\ -dt = \sin x dx\end{matrix}\right| = -\int t^8 dt = \frac{t^9}{9} + C = \frac{\cos^9 x}{9} + C$$

Задача решена.

Пример 6. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+9}dx$$

Решение.

Используем метод замены переменной, сделав подстановку $t = x^2 + 5x + 9$.

Тогда $dt = (x^2 + 5x + 9)'dx = (2x + 5)dx$. В результате получим табличный интеграл, найдем его и сделаем обратную замену:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+9}dx = \left| \begin{matrix} \text{замена} \\ t = x^2+5x+9 \\ dt = (2x+5)dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+5x+9| + C$$

Задача решена.

Пример 7. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^9 dx}{x^{10}+7}$$

Решение.

Используем метод замены переменной, сделав подстановку $t = x^{10} + 7$.

Тогда $dt = (x^{10} + 7)'dx = 10x^9dx$, следовательно, $x^9dx = \frac{1}{10}dt$. В результате получим табличный интеграл, найдем его и сделаем обратную замену:

$$\int \frac{x^9 dx}{x^{10}+7} = \left| \begin{matrix} \text{замена} \\ t = x^{10}+7 \\ dt = 10x^9 dx \\ x^9dx = \dfrac{1}{10}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{10}dt}{t} = \frac{1}{10}\ln|t| + C = \frac{1}{10}\ln|x^{10}+7| + C$$

Задача решена.

Пример 8. Найти неопределенный интеграл

$$\int x\, e^{4x}\, dx$$

Решение.

Используем метод интегрирования по частям, разбив подынтегральное выражение на два множителя: $u = x$ и $dv = e^{4x}\, dx$. Дифференцированием первого множителя находим $du = dx$. Интегрированием второго множителя находим $v = \int dv = \int e^{4x}\, dx = \frac{1}{4}e^{4x}$. Далее используем формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$, подставляя найденные значения выражений u, v, du в правую часть формулы. В результате получаем новый интеграл, который проще исходного, и находим его.

$$\int x\,e^{4x}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = e^{4x}\,dx \\ du = dx \\ v = \int dv = \int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array} \right| = x \cdot \frac{1}{4}e^{4x} - \int \frac{1}{4}e^{4x}\,dx =$$

$$= \frac{x}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}\,dx = \frac{x}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}e^{4x} + C = \frac{x}{4}e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + C$$

Задача решена.

Пример 9. Найти неопределенный интеграл

$$\int x^2 \cos 6x\,dx$$

Решение.

Используем метод интегрирования по частям, разбив подынтегральное выражение на два множителя: $u = x^2$ и $dv = \cos 6x\,dx$. Дифференцированием первого множителя находим $du = (x^2)'dx = 2xdx$. Интегрированием второго множителя находим $v = \int dv = \int \cos 6x\,dx = = \frac{1}{6}\sin 6x$. Далее используем формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$, подставляя найденные значения выражений u, v, du в правую часть формулы. В результате получаем новый интеграл, который проще исходного.

$$\int x^2 \cos 6x = \left| \begin{array}{c} u = x^2 \\ dv = \cos 6x\,dx \\ du = 2xdx \\ v = \int dv = \int \cos 6x\,dx = \frac{1}{6}\sin 6x \end{array} \right| = x^2 \cdot \frac{1}{6}\sin 6x - \int \frac{1}{6}\sin 6x \cdot 2xdx =$$

$$= \frac{x^2}{6}\sin 6x - \frac{1}{3}\int x \sin 6x\,dx = \cdots$$

К новому интегралу повторно применяем метод интегрирования по частям, разбив подынтегральное выражение на два множителя: $u = x$ и $dv = \sin 6x\,dx$. Дифференцированием первого множителя находим $du = dx$. Интегрированием второго множителя находим $v = \int dv = \int \sin 6x\,dx = -\frac{1}{6}\cos 6x$. Далее вновь используем формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$, подставляя найденные значения выражений u, v, du в правую часть формулы. В результате получаем новый интеграл, который практически является табличным.

$$\frac{x^2}{6}\sin 6x - \frac{1}{3}\int x \sin 6x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = \sin 6x\,dx \\ du = dx \\ v = \int dv = \int \sin 6x\,dx = -\frac{1}{6}\cos 6x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{6}\sin 6x - \frac{1}{3}\left(x \cdot \left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right) - \int \left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{x^2}{6}\sin 6x + \frac{1}{18}x\cos 6x - \frac{1}{18}\int \cos 6x\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{6}\sin 6x + \frac{x}{18}\cos 6x - \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + C =$$

$$= \frac{x^2}{6}\sin 6x + \frac{x}{18}\cos 6x - \frac{1}{108}\sin 6x + C$$

Задача решена.

Пример 10. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{5x-3}{x^2+8x+20}dx$$

Решение.

Подынтегральная функция представляет собой простейшую рациональную дробь III типа. Для ее интегрирования в числителе выделим производную знаменателя, добавив при этом недостающий множитель и слагаемое, чтобы значение числителя не изменилось. Так как $(x^2+8x+20)' = 2x+8$, числитель запишем в виде $\frac{5}{2}(2x+8) - \frac{5}{2}\cdot 8 - 3$, т.е. $\frac{5}{2}(2x+8) - 23$. После почленного деления интеграл разобьется на сумму двух интегралов, каждый из которых решается отдельно:

$$\int \frac{5x-3}{x^2+8x+20}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+8) - \frac{5}{2}\cdot 8 - 3}{x^2+8x+20}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+8) - 23}{x^2+8x+20}dx =$$

$$= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+8)}{x^2+8x+20}dx - \int \frac{23}{x^2+8x+20}dx = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+8)}{x^2+8x+20}dx - 23\int \frac{dx}{x^2+8x+20} = \cdots$$

Первый из полученных интегралов (***I***$_1$) решается методом замены переменной (см. пример 6):

$$\boldsymbol{I_1} = \int \frac{(2x+8)}{x^2+8x+20}dx = \left|\begin{matrix}\text{замена}\\ t = x^2+8x+20\\ dt = (2x+8)dx\end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+8x+20|$$

Второй из полученных интегралов (***I***$_2$) решается путем выделения в знаменателе полного квадрата и преобразования, таким образом, к табличному интегралу 3н с последующим использованием правила интегрирования 2в:

$$\boldsymbol{I_2} = \int \frac{dx}{x^2+8x+20} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 20} = \int \frac{dx}{(x+4)^2+4} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+4)^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2}$$

Подставив найденные значения $\boldsymbol{I_1}$ и $\boldsymbol{I_2}$, получим:

$$\ldots = \frac{5}{2}\cdot \boldsymbol{I_1} - 23\cdot \boldsymbol{I_2} = \frac{5}{2}\cdot \ln|x^2+8x+20| - 23\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2} + C =$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x^2+8x+20| - \frac{23}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2} + C$$

Задача решена.

Пример 11. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x-5}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$

Решение.

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. Для ее интегрирования необходимо разложить данную дробь на сумму простейших дробей I типа. Применим для этого метод неопределенных коэффициентов A,B,C, для отыскания которых используем частные значения x, равные корням знаменателя:

$$\frac{2x-5}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Исходная и конечная дроби имеют одинаковые знаменатели, значит их числители тоже должны быть равны:

$$2x-5 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)$$

В полученное равенство подставляем вместо x частные значения, равные корням знаменателя:

1) $x = 1$: $\quad 2\cdot 1 - 5 = A(1-2)(1+3) + B(1-1)(1+3) + C(1-1)(1-2)$

$$-3 = A\cdot(-4) + B\cdot 0 + C\cdot 0$$

$$-3 = -4A$$

$$A = \frac{3}{4}$$

2) $x = 2$: $\quad 2\cdot 2 - 5 = A(2-2)(2+3) + B(2-1)(2+3) + C(2-1)(2-2)$

$$-1 = A\cdot 0 + B\cdot 5 + C\cdot 0$$

$$-1 = 5B$$

$$B = -\frac{1}{5}$$

3) $x = -3$: $2 \cdot (-3) - 5 = A(-3-2)(-3+3) + B(-3-1)(-3+3) + C(-3-1)(-3-2)$

$$-11 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 20$$

$$-11 = 20C$$

$$C = -\frac{11}{20}$$

Коэффициенты A,B,C найдены. Заменяем подынтегральную дробь на сумму трех простейших дробей и почленно интегрируем, используя правила интегрирования 2в, а также табличный интеграл 3б:

$$\int \frac{2x-5}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}\right)dx = \int \left(\frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{5}}{x-2} + \frac{-\frac{11}{20}}{x+3}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{11}{20}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{11}{20}\ln|x+3| + C$$

Задача решена.