Частные производные функции двух переменных

Методические указания к выполнению индивидуального задания №2
по Математическому анализу

При вычислении частных производных функции двух переменных используются следующие положения (*см. Лекции*).

1) Определения частных производных функции двух переменных $z = f(x,y)$:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

где z'_x – частная производная (1-го порядка) функции z по переменной x,

$\Delta_x z$ – частное приращение функции z по переменной x.

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

где z'_y – частная производная (1-го порядка) функции z по переменной y,

$\Delta_y z$ – частное приращение функции z по переменной y.

2) Правила дифференцирования функции одной переменной:

а) $C' = 0 \quad (C - const)$;

б) $\big(Cf(x)\big)' = C \cdot f'(x)$;

в) $(u(x) + v(x) + \cdots)' = u'(x) + v'(x) + \cdots$;

г) $\big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

д) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

3) Таблица производных элементарных функций:

а) $y = x^a \qquad y' = ax^{a-1}$;

частные случаи: $y = \sqrt{x} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$y = \frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}$;

б) $y = \sin x \qquad y' = \cos x$;

в) $y = \cos x \qquad y' = -\sin x$;

г) $y = \operatorname{tg} x \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

д) $y = \operatorname{ctg} x \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

е) $y = \arcsin x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

ж) $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

и) $y = \operatorname{arc\,tg} x$ $\qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$;

к) $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ $\qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$;

л) $y = a^x$ $\qquad y' = a^x \ln a$;

частный случай: $\quad y = e^x$ $\qquad y' = e^x$;

м) $y = \log_a x$ $\qquad y' = \frac{1}{x \ln a}$;

частный случай: $\quad y = \ln x$ $\qquad y' = \frac{1}{x}$.

4) Правило дифференцирования сложной функции одной переменной $y = f\big(u(x)\big)$:

$$\left[f\big(u(x)\big)\right]' = f_u' \cdot u_x'$$

5) Правило вычисления частных производных функции двух переменных:

При вычислении частной производной z_x' функция $z = f(x, y)$ временно рассматривается как функция одной переменной x, а переменная y считается при этом постоянной.

При вычислении частной производной z_y' функция $z = f(x, y)$ временно рассматривается как функция одной переменной y, а переменная x считается при этом постоянной.

(См. примеры 1, 2)

Пример 1. Найти частные производные первого порядка функции 2-х переменных:

$$z = arctgx + x^5 \cos y - \ln y$$

Решение.

При вычислении частной производной z_x' функция $z = f(x, y)$ временно рассматривается как функция одной переменной x, а переменная y считается при этом постоянной. Следовательно, находим частную производную по правилам дифференцирования функции одной переменной. Поэтому, в частности, во втором слагаемом множитель $\cos y$ рассматривается как постоянный множитель и просто выносится за знак производной, а третье слагаемое $\ln y$ рассматривается как константа, производная которой равна нулю.

При вычислении частной производной z_y' функция $z = f(x, y)$ временно рассматривается как функция одной переменной y, а переменная x считается при этом постоянной. Аналогично находим частную производную по правилам дифференцирования функции одной переменной. При этом, в частности, первое слагаемое $arctgx$ рассматривается как константа, производная которой равна нулю, а во втором слагаемом множитель x^5 рассматривается как постоянный множитель и просто выносится за знак производной.

С учетом вышеизложенного решение имеет вид:

$$z'_x = (arctgx + x^5\cos y - \ln y)'_x = (arctgx)'_x + (x^5\cos y)'_x - (\ln y)'_x =$$
$$= \frac{1}{1+x^2} + (x^5)'_x \cdot \cos y - 0 = \frac{1}{1+x^2} + 5x^4\cos y$$

$$z'_y = (arctgx + x^5\cos y - \ln y)'_y = (arctgx)'_y + (x^5\cos y)'_y - (\ln y)'_y =$$
$$= 0 + x^5 \cdot (\cos y)'_y - \frac{1}{y} = -x^5\sin y - \frac{1}{y}$$

Ответ:

$$z'_x = \frac{1}{1+x^2} + 5x^4\cos y$$

$$z'_y = -x^5\sin y - \frac{1}{y}$$

Пример 2. Найти частные производные первого порядка функции 2-х переменных:

$$z = \sin(x^7 + \operatorname{tg} y)$$

Решение.

Данная функция представляет собой сложную функцию вида $z = f\big(u(x,y)\big)$, или $z = \sin u$, где $u = x^7 + \operatorname{tg} y$. То есть состоит из двух функций: внешней тригонометрической и внутренней функции двух переменных. Поэтому искать производную надо по правилу дифференцирования сложной функции с учетом правил вычисления частных производных функции двух переменных:

$$\big[f\big(u(x,y)\big)\big]'_x = f'_u \cdot u'_x \quad \text{и} \quad \big[f\big(u(x,y)\big)\big]'_y = f'_u \cdot u'_y$$

С учетом вышеизложенного решение имеет вид:

$$z'_x = [\sin(x^7 + \operatorname{tg} y)]'_x = \cos(x^7 + \operatorname{tg} y) \cdot (x^7 + \operatorname{tg} y)'_x = \cos(x^7 + \operatorname{tg} y) \cdot (7x^6 + 0) =$$
$$= 7x^6\cos(x^7 + \operatorname{tg} y)$$

$$z'_y = [\sin(x^7 + \operatorname{tg} y)]'_y = \cos(x^7 + \operatorname{tg} y) \cdot (x^7 + \operatorname{tg} y)'_y = \cos(x^7 + \operatorname{tg} y) \cdot \left(0 + \frac{1}{\cos^2 y}\right) =$$
$$= \frac{\cos(x^7 + \operatorname{tg} y)}{\cos^2 y}$$

Ответ:

$$z'_x = 7x^6\cos(x^7 + \operatorname{tg} y)$$

$$z'_y = \frac{\cos(x^7 + \operatorname{tg} y)}{\cos^2 y}$$