МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«МАТИ - Российский государственный технологический университет имени К. Э. Циолковского»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

Графическое решение задач линейного программирования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ ПО КУРСУ: «ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ»

Составители: А. В. Челпанов
И. М. Мамонов

Москва 2012

Графическое решение задач линейного программирования/ Сост.: А. В. Челпанов, И. М. Мамонов: Метод. указания. — М.: МАТИ, 2012. – 12 с.

ВВЕДЕНИЕ

Что же такое линейное программирование? Это один из первых и наиболее подробно изученных разделов математического программирования. Именно линейное программирование явилось тем разделом, с которого начала развиваться сама дисциплина «математическое программирование». Термин «программирование» в названии дисциплины ничего общего с термином «программирование (т.е. составление программ) для ЭВМ» не имеет, так как дисциплина «линейное программирование» возникла еще до того времени, когда ЭВМ стали широко применяться при решении математических, инженерных, экономических и других задач. Термин «линейное программирование» возник в результате неточного перевода английского «linear programming». Одно из значений слова «programming» - составление планов, планирование. Следовательно, правильным переводом «linear programming» было бы не «линейное программирование», а «линейное планирование», что более точно отражает содержание дисциплины. Однако, термин линейное программирование, нелинейное программирование и т.д. в нашей литературе стали общепринятыми.

Итак, линейное программирование возникло после Второй мировой войны и стал быстро развиваться, привлекая внимание математиков, экономистов и инженеров благодаря возможности широкого практического применения, а так же математической «стройности».

Можно сказать, что линейное программирование применимо для построения математических моделей тех процессов, в основу которых может быть положена гипотеза линейного представления реального мира: экономических задач, задач управления и планирования, оптимального размещения оборудования и пр.

Задачами линейного программирования называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств. Кратко задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом: найти вектор значений переменных, доставляющих экстремум линейной целевой функции при m ограничениях в виде линейных равенств или неравенств.

Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации. К числу задач линейного программирования можно отнести задачи:

рационального использования сырья и материалов; задачи оптимизации раскроя;

оптимизации производственной программы предприятий;

оптимального размещения и концентрации производства;

составления оптимального плана перевозок, работы транспорта;

управления производственными запасами;

и многие другие, принадлежащие сфере оптимального планирования.

Так, по оценкам американских экспертов, около 75% от общего числа применяемых оптимизационных методов приходится на линейное программирование. Около четверти машинного времени, затраченного в последние годы на проведение научных исследований, было отведено решению задач линейного программирования и их многочисленных модификаций.

Первые постановки задач линейного программирования были сформулированы известным советским математиком Л.В.Канторовичем, которому за эти работы была присуждена Нобелевская премия по экономике.

В настоящее время линейное программирование является одним из наиболее употребительных аппаратов математической теории оптимального принятия решения.

Итак, линейное программирование - это наука о методах исследования и отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Таким образом, задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Графическое решение задач линейного программирования

Цель работы: научиться решать задачи линейного программирования с двумя переменными графическим способом.

Краткие сведения из теории

Графический способ решения задач линейного программирования целесообразно использовать для:

- решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;
- решение задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух переменных.

Запишем задачу линейного программирования с двумя переменными:

целевая функция:

$$Z_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{1}$$

ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \tag{3}$$

Каждое из неравенств (2) – (3) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$; $\left(i = \overline{1, m}\right)$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. В том случае, если система неравенств (2) – (3) совместна, область её решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то областью допустимых решений является выпуклое множество, которое называется многоугольником решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений с заменой знаков неравенств на знаки равенств.

Областью допустимых решений системы неравенств (2) – (3) может быть:

- выпуклый многоугольник;
- выпуклая многоугольная неограниченная область;
- пустая область;
- луч;
- отрезок;
- единственная точка.

Целевая функция (1) определяет на плоскости семейство параллельных прямых, каждой из которых соответствует определённое значение Z.

Вектор $\overline{C} = (c_1, c_2)$ с координатами c_1 и c_2, перпендикулярный этим прямым, указывает направление наискорейшего возрастания *Z*, а противоположный вектор – направление убывания *Z*.

Если в одной и той же системе координат изобразить область допустимых решений системы неравенств (2) – (3) и семейство параллельных прямых (1), то задача определения максимума функции *Z* сведётся к нахождению в допустимой области точки, через которую проходит прямая из семейства $Z = const$, и которая соответствует наибольшему значению параметра *Z*.

Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение.

Для определения данной вершины построим линию уровня $Z = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $\overline{C} = (c_1, c_2)$, и буде передвигать её в направлении вектора $\overline{C} = (c_1, c_2)$ до тех пор, пока она не коснётся последней крайней (угловой) точки многоугольника решений. координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации задачи (1) – (3), отмечу, что при нахождении её решения могут встретится случаи, изображенные на рис. 1 – 4.

Рис. 1 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке *A*. Из рис. 2 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка *AB*.

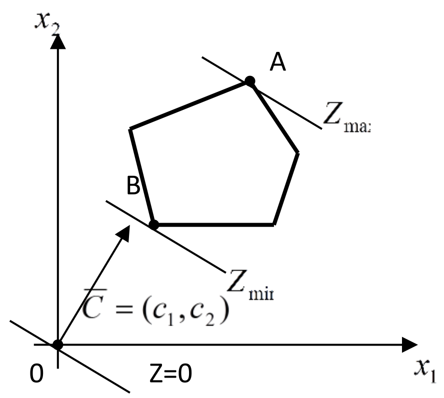

Рис. 1. Оптимум функции Z достижим в точке A.

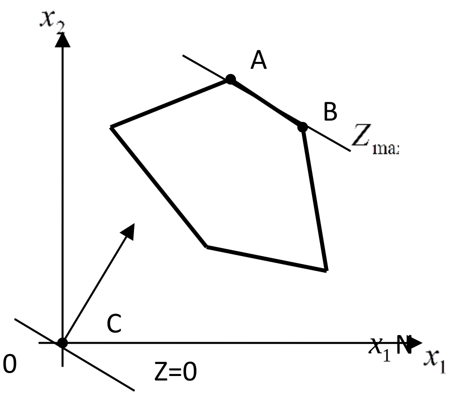

Рис. 2. Оптимум функции Z достигается в любой точке [AB].

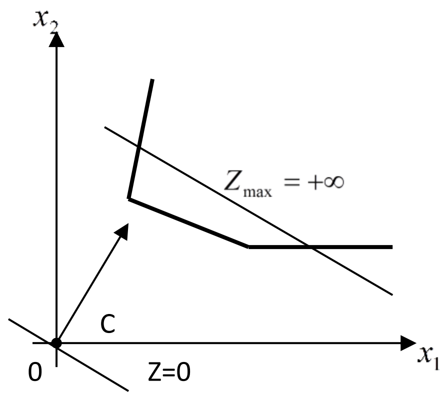

Рис. 3. Оптимум

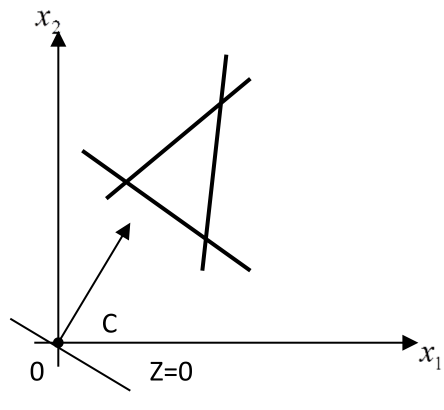

Рис. 4. Область допустимых

функции Z недостижим. решений – пустая область.

На рис. 3 изображен случай, когда максимум недостижим, а на рис. 4 – случай, когда система ограничений задачи несовместна. Отмечу, что нахождение минимального значения Z при данной системе ограничений отличается от нахождения её максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня Z передвигается не в направлении вектора $\overline{C}=\left(c_1,c_2\right)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении её минимального значения.

Для практического решения задачи линейного программирования (1) – (3) на основе её геометрической интерпретации необходимо следующее:

1. Построить прямые, уравнения которых получается в результате замены в ограничениях (1) – (3) знаков неравенств на знаки равенств.
2. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Определить многоугольник решений.
4. Построить вектор $\overline{C}=\left(c_1,c_2\right)$.
5. Построить прямую $Z=c_1x_1+c_2x_2=0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $\overline{C}$.
6. Передвигать прямую $Z=c_1x_1+c_2x_2$ в направлении вектора $\overline{C}$, в результате чего-либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность функции в этой точке.

ПРИМЕР

Производственная задача

Цех может производить стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола - 20 единиц (футов красного дерева). Стул требует 10 человеко-часов, стол - 15. Имеется 400 единиц материала и 450 человеко-часов. Прибыль при производстве стула - 45 долларов США, при производстве стола - 80 долларов США. Сколько надо сделать стульев и столов, чтобы получить максимальную прибыль?

Обозначим: X_1 - число изготовленных стульев, X_2 - число сделанных столов. Задача оптимизации имеет вид:

$45\,X_1 + 80\,X_2 \to \max$,
$5\,X_1 + 20\,X_2 \le 400$,
$10\,X_1 + 15\,X_2 \le 450$,
$X_1 \ge 0$,
$X_2 \ge 0$.

В первой строке выписана целевая функция - прибыль при выпуске X_1 стульев и X_2 столов. Ее требуется максимизировать, выбирая оптимальные значения переменных X_1 и X_2 . При этом должны быть выполнены ограничения по материалу (вторая строчка) - истрачено не более 400 футов красного дерева. А также и ограничения по труду (третья строчка) - затрачено не более 450 часов. Кроме того, нельзя забывать, что число столов и число стульев неотрицательны. Если $X_1 = 0$, то это значит, что стулья не выпускаются. Если же хоть один стул сделан, то X_1 положительно. Но невозможно представить себе отрицательный выпуск - X_1 не может быть отрицательным с экономической точки зрения, хотя с математической точки зрения такого ограничения усмотреть нельзя. В четвертой и пятой строчках задачи и констатируется, что переменные неотрицательны.

Условия производственной задачи можно изобразить на координатной плоскости. Будем по горизонтальной оси абсцисс откладывать значения X_1 , а по вертикальной оси ординат - значения X_2 . Тогда ограничения по материалу и последние две строчки оптимизационной задачи выделяют возможные значения (X_1 , X_2) объемов выпуска в виде треугольника (см. рис. 1).

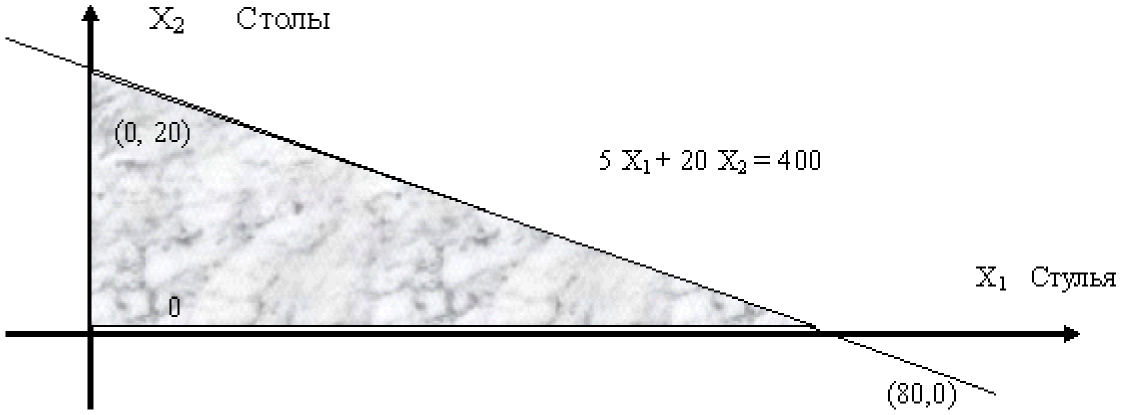

Рис. 1. Ограничения по материалу.

Таким образом, ограничения по материалу изображаются в виде выпуклого многоугольника, конкретно, треугольника. Этот треугольник получается путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей второй строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось X_1, соответствующую стульям, в точке (80,0). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление стульев, то будет изготовлено 80 стульев. Та же прямая пересекает ось X_2, соответствующую столам, в точке (0,20). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление столов, то будет изготовлено 20 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, а не равенство - материал останется.

Аналогичным образом можно изобразить и ограничения по труду (см. рис. 2).

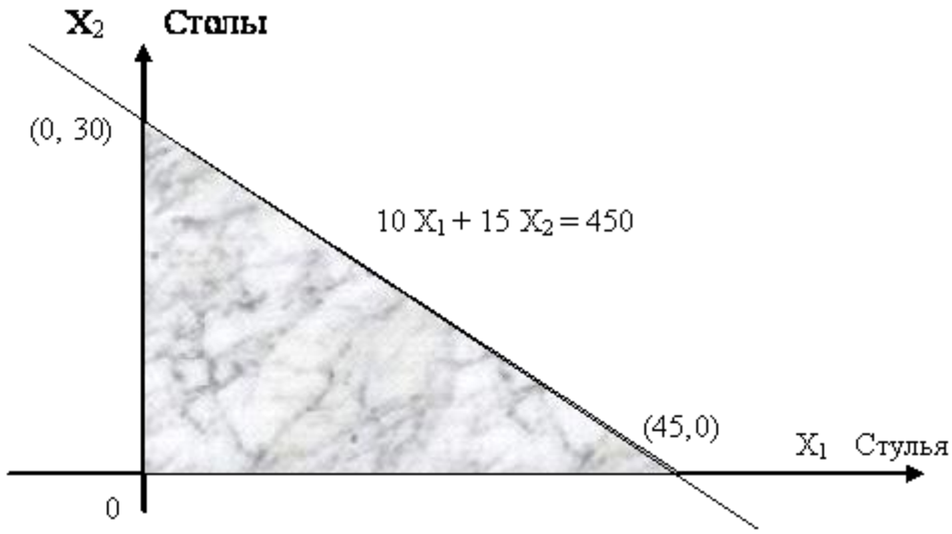

Рис. 2. Ограничения по труду.

Таким образом, ограничения по труду также изображаются в виде треугольника. Этот треугольник также получается путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей третьей строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось X_1, соответствующую стульям, в точке (45,0). Это означает, что если все трудовые ресурсы пустить на изготовление стульев, то будет сделано 45 стульев. Та же прямая пересекает ось X_2, соответствующую столам, в точке (0,30). Это означает, что если всех рабочих поставить на изготовление столов, то будет сделано 30 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, а не равенство - часть рабочих будет простаивать.

Мы видим, что очевидного решения нет - для изготовления 80 стульев есть материал, но не хватает рабочих рук, а для производства 30 столов есть рабочая сила, но нет материала, Значит, надо изготавливать и то, и другое. Но в каком соотношении?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо "совместить" рис.1 и рис.2, получив область возможных решений, а затем проследить, какие значения принимает целевая функция на этом множестве (рис.3).

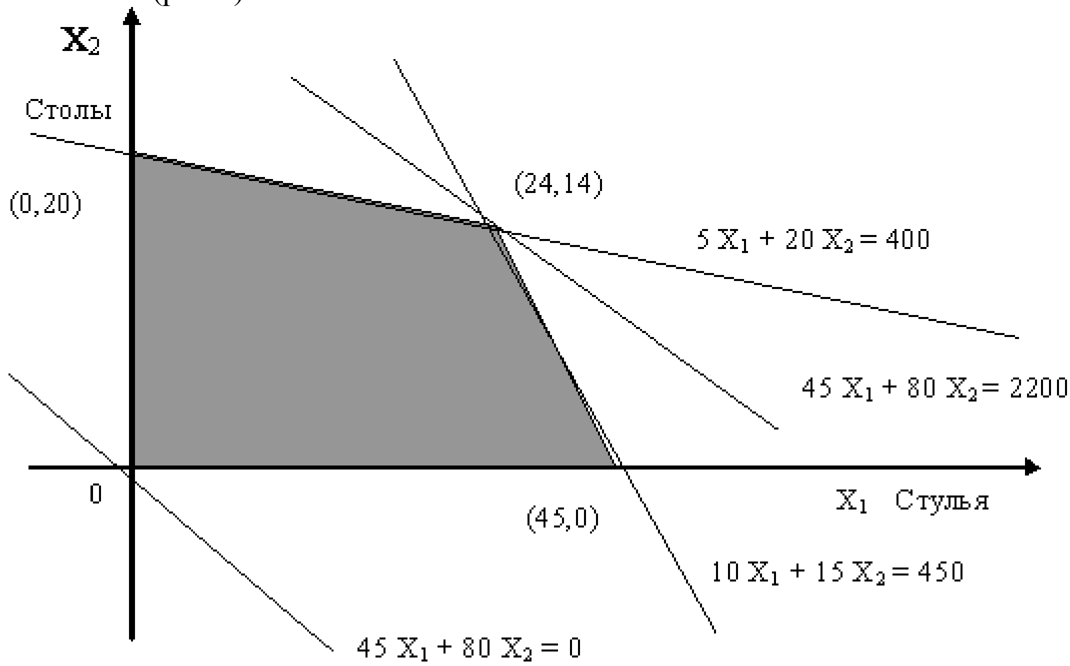

Рис. 3. Основная идея линейного программирования.

Таким образом, множество возможных значений объемов выпуска стульев и столов (X_1 , X_2), или, в других терминах, множество А, задающее ограничения на параметр управления в общей оптимизационной задаче, представляет собой пересечение двух треугольников, т.е. выпуклый четырехугольник, показанный на рис. 3. Три его вершины очевидны - это (0,0), (45,0) и (0,20). Четвертая - это пересечение двух прямых - границ треугольников на рис.1 и рис.2, т.е. решение системы уравнений

$5 X_1 + 20 X_2 = 400$,

$10 X_1 + 15 X_2 = 450$.

Из первого уравнения: $5 X_1 = 400 - 20 X_2$, $X_1 = 80 - 4 X_2$. Подставляем во второе уравнение: $10 (80 - 4 X_2) + 15 X_2 = 800 - 40X_2 + 15 X_2 = 800 - 25 X_2 = 450$, следовательно, $25 X_2 = 350$, $X_2 = 14$, откуда $X_1 = 80 - 4 \times 14 = 80 - 56 = 24$. Итак, четвертая вершина четырехугольника - это (24, 14).

Надо найти максимум линейной функции на выпуклом многоугольнике. (В общем случае линейного программирования - максимум линейной функции на выпуклом многограннике, лежащем в конечномерном линейном пространстве.) Основная идея линейного программирования состоит в том, что максимум достигается в вершинах многоугольника. В общем случае - в одной вершине, и это - единственная точка максимума. В частном - в двух, и тогда отрезок, их соединяющий, тоже состоит из точек максимума.

Целевая функция $45 X_1 + 80 X_2$ принимает минимальное значение, равное 0, в вершине (0,0). При увеличении аргументов эта функция увеличивается. В вершине (24,14) она принимает значение 2200. При этом прямая $45\ X_1 + 80\ X_2 = 2200$ проходит между прямыми ограничений $5\ X_1 + 20\ X_2 = 400$ и $10\ X_1 + 15\ X_2 = 450$, пересекающимися в той же точке. Отсюда, как и из непосредственной проверки двух оставшихся вершин, вытекает, что максимум целевой функции, равный 2200, достигается в вершине (24,14).

Таким образом, оптимальный выпуск таков: 24 стула и 14 столов. При этом используется весь материал и все трудовые ресурсы, а прибыль равна 2200 долларам США.

Двойственная задача. Каждой задаче линейного программирования соответствует так называемая двойственная задача. В ней по сравнению с исходной задачей строки переходят в столбцы, неравенства меняют знак, вместо максимума ищется минимум (или наоборот, вместо минимума - максимум). Задача, двойственная к двойственной - эта сама исходная задача. Сравним исходную задачу (слева) и двойственную к ней (справа):

$$\begin{array}{ll}
45\ X_1 + 80\ X_2 \to \max, & 400\ W_1 + 450\ W_2 \to \min, \\
5\ X_1 + 20\ X_2 \le 400, & 5\ W_1 + 10\ W_2 \ge 45, \\
10\ X_1 + 15\ X_2 \le 450, & 20\ W_1 + 15\ W_2 \ge 80, \\
X_1 \ge 0, & W_1 \ge 0, \\
X_2 \ge 0. & W_2 \ge 0.
\end{array}$$

Можно доказать, что оптимальные значения целевых функций в исходной и двойственной задачах совпадают (т.е. максимум в исходной задаче совпадает с минимумом в двойственной). При этом оптимальные значения W_1 и W_2 показывают стоимость материала и труда соответственно, если их оценивать по вкладу в целевую функцию. Чтобы не путать с рыночными ценами этих факторов производства, W_1 и W_2 называют "объективно обусловленными оценками" сырья и рабочей силы.

Задания

Задача 1. Колхоз имеет возможность приобрести не более 19 трехтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика - 4000 руб., пятитонного - 5000 руб. Колхоз может выделить для приобретения автомашин 141 тысяч рублей. Сколько нужно приобрести автомашин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной? Задачу решить графическими и аналитическими методами.

Задача 2. Решить задачу графическим методом на минимум и на максимум

$$x - 2y \to \min, \max$$

$$\begin{cases} 5x + 3y \ge 30, \\ x - y \le 3, \\ -3x + 5y \le 15, \end{cases}$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

Задача 3. Решить задачу графическим методом на минимум и на максимум

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$$

Задача 4. Среди чисел x и y, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ x + y \leq 1, \\ x - 4y \geq -2, \end{cases}$$

найти такие, при которых разность этих чисел y-x принимает наибольшее значение.

Задача 5. Решить графическим методом ЗЛП, заданную указанной математической моделью.

$$F = 2x_1 - x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq -1, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6. \end{cases}$$

Задача 6. Решите графически следующие задачи линейного программирования

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача 7. Решить графическим методом

$$f = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 30, \\ 5x_1 - x_2 \leq 25, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

Александр Витальевич Челпанов

Игорь Михайлович Мамонов

Методические указания к лабораторной работе

Графическое решение задач линейного программирования

Под редакцией авторов

Технический редактор М. А. Соколова

Подписано в печать 09.10.2012 Формат 60x90.

Печать на ризографе. Усл. печ. л. 1,39. Уч. изд. л. 0,42

Тираж 50 экз. Заказ № 126

Издательский центр МАТИ

109240, Москва, Берниковская наб., 14

Типография Издательского центра МАТИ

109240, Москва, Берниковская наб., 14