Н.Д.Выск

Математический анализ
Часть 2. Интегральное исчисление функций одной переменной. Обыкновенные дифференциальные уравнения

учебное пособие

МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского
Кафедра «Высшая математика»
2011

Неопределенный интеграл

1.1.1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Функция *F(x)* называется **первообразной** (для) функции *f(x)* на некотором множестве значений *x*, если *F´(x) = f(x)* на этом множестве.

Теорема 1. Если функции *F(x)* и *G(x)* являются первообразными одной и той же функции *f(x)* на некотором множестве, то необходимым и достаточным условием этого является то, что *G(x) = F(x) + C*, где *C* – любая постоянная.

Доказательство.

1. Пусть *F(x)* - первообразная *f(x)*, то есть *F´(x) = f(x).* Тогда для любого числа *C* *(F(x) + C)´= F´(x) + C´= F´(x)* + 0 = *f(x),* то есть *F(x) + C* - первообразная *f(x).*
2. Пусть *F(x)* и *G(x)* – две различные первообразные одной и той же функции *f(x).* Тогда *(F(x) – G(x))´= F´(x) - G´(x) = f(x) – f(x) = 0,* следовательно, *F(x) – G(x) = C* (по следствию из теоремы Лагранжа). Теорема доказана.

Таким образом, если функция на данном множестве имеет одну первообразную, то она имеет их бесконечно много, причем все они отличаются друг от друга постоянными слагаемыми.

Совокупность всех первообразных функции *f(x)* на некотором множестве называется ее **неопределенным интегралом**.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C.$

f(x) при этом называется подынтегральной функцией, а *f(x)dx* – подынтегральным выражением.

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = F'(x)dx = f(x)dx.$

2. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C.$

3. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Действительно,

$$\int (f(x)+g(x))dx = F(x)+G(x)+C,$$

а $\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+C_1+G(x)+C_2.$

Но, поскольку C_1+C_2 – произвольная постоянная, выражения в левой и правой частях равны.

4. $\int kf(x)dx = kF(x)+C_1 = k(F(x)+\frac{C_1}{k}) = k(F(x)+C) = k\int f(x)dx.$

Замечание. Все перечисленные свойства формулировались и доказывались в предположении, что на некотором множестве существуют первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, равные соответственно $F(x)$ и $G(x)$.

Табличные интегралы

Из определения первообразной и неопределенного интеграла следует, что таблицу основных интегралов можно получить из таблицы основных производных, считая производные табличных функций подынтегральными функциями, а сами функции – их первообразными.

1	$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$$
2	$$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C.$$
3	$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$$ $$\int e^{x}dx = e^{x} + C.$$
4	$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$
5	$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$
6	$$\int \frac{dx}{\cos^{2}x} = tgx + C.$$
7	$$\int \frac{dx}{\sin^{2}x} = -ctgx + C.$$
8	$$\int shxdx = chx + C.$$
9	$$\int chxdx = shx + C.$$
10	$$\int \frac{dx}{ch^{2}x} = thx + C.$$
11	$$\int \frac{dx}{sh^{2}x} = cthx + C.$$
12	$$\int \frac{dx}{x^{2}+a^{2}} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a} + C.$$
13	$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$$

Можно добавить к этой таблице еще несколько формул, не следующих непосредственно из таблицы производных, но удобных для вычисления многих интегралов, а именно:

14	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C.$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\| + C.$

Доказательство справедливости этих формул предлагается провести самостоятельно.

Примеры.

$$1.\ \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx + \int x^{-\frac{1}{4}}dx =$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + C_1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C_2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C_3 =$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

$$2.\ \int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$

$$= tgx + C_1 + x + C_2 = tgx + x + C.$$

Замена переменной в неопределенном интеграле

Теорема 2. Пусть функция *f(x)* определена на множестве *X*, а функция *φ(t)* – на множестве *Φ*, причем $\varphi(t) \in X \quad \forall t \in \Phi$. Тогда, если функция *f(x)* имеет первообразную *F(x)* на *X*, а *φ(t)* дифференцируема на *Φ*, то

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx.$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

поэтому функция *F(φ(t))* является первообразной функции *f(φ(t)) φ'(t)*. Следовательно,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

С другой стороны, при $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)dx = F(\varphi(t) + C.$$

В полученных формулах равны правые части, следовательно, равны и левые, что доказывает справедливость утверждения теоремы.

Замечание 1. Формулу

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \quad (1)}$$

называют **формулой интегрирования подстановкой**.

Замечание 2. Часто удобно бывает использовать эту формулу «в обратную сторону»:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad (2)}$$

то есть заменять переменную x функцией новой переменной t. Формула (2) носит название **формулы интегрирования заменой переменной**.
Формулы (1) и (2) показывают, что вид первообразной не изменяется при замене независимой переменной x на функцию $\varphi(t)$, поэтому их называют **формулами инвариантности интегрирования**.

Примеры.

$$1. \int \sin^2 t \cos t dt = \int \sin^2 t (\sin t)' dt =$$
$$= \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C = \frac{\sin^3 t}{3} + C.$$

При этом была сделана подстановка $x = \sin t$.

$$2. \int \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{1+t}{t^2}(t^2)' dt =$$
$$= \int \frac{1+t}{t^2} 2t dt = 2\int \frac{1+t}{t} dt = 2\left(\int \frac{dt}{t} + \int dt \right) = 2(\ln|t| + t) + C =$$
$$= 2(\ln\sqrt{x} + \sqrt{x}) + C = \ln x + 2\sqrt{x} + C.$$

Интеграл был вычислен с помощью замены переменной: $x = t^2$.

Формула интегрирования по частям

Теорема 3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке, и на нем существует интеграл $\int vdu,$ то на нем существует и интеграл $\int udv,$ причем

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство.
$d(uv) = vdu + udv,$ поэтому $udv = d(uv) - vdu$. Проинтегрируем обе части полученного равенства, учитывая, что

$$\int d(uv) = uv + C.$$

Тогда

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu,$$

что и требовалось доказать. Существование интеграла в левой части равенства следует из существования обоих интегралов в правой части.

Пример.

$$\int x\cos x dx = \int xd(\sin x) =$$

$$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x - \cos x + C.$$

Примеры решения задач

Задача 1.
Вычислить интеграл

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx.$$

Указание

Представьте слагаемые в виде степеней: $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ и т.д.

Решение

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx = \int\left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)dx =$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C=2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$$

Ответ: $2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

Задача 2.

Вычислить интеграл

$$\int\frac{x^3-x3^x+5}{x}dx.$$

Указание

Разделите на знаменатель каждое слагаемое числителя по отдельности и найдите первообразные полученных функций.

Решение

$$\int\frac{x^3-x3^x+5}{x}dx=\int\left(x^2-3^x+\frac{5}{x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+5\ln|x|+C.$$

Ответ: $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+5\ln|x|+C.$

Задача 3.

Вычислить интеграл

$$\int\frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}dx.$$

Указание

Раскройте скобки в числителе и сгруппируйте слагаемые так, чтобы каждое из них имело один общий множитель со знаменателем.

Решение

$$\int\frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}dx=\int\frac{x^2-6x+9}{x(x^2+9)}dx=$$

$$=\int\frac{(x^2+9)-6x}{x(x^2+9)}dx=\int\left(\frac{x^2+9}{x(x^2+9)}-\frac{6x}{x(x^2+9)}\right)dx=$$

$$= \int\left(\frac{1}{x} - 6\cdot\frac{1}{x^2+9}\right)dx = \ln|x| - 6\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3} + C =$$

$$= \ln|x| - 2arctg\frac{x}{3} + C.$$

Ответ: $\ln|x| - 2arctg\frac{x}{3} + C.$

Задача 4.
Вычислить интеграл

$$\int\frac{3-2\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx.$$

Указание

Воспользуйтесь формулами

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad и \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Решение

$$\int\frac{3-2\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{3\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx =$$

$$= \int\frac{5\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{5\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{5}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = 5tgx - ctgx + C.$$

Ответ: $5tgx - ctgx + C.$

Задача 5.
Вычислить интеграл

$$\int\frac{1}{2-\sqrt{x}}dx.$$

Указание

Сделайте замену:

$$t = \sqrt{x}.$$

Решение

Сделаем замену:

$$t = \sqrt{x}.$$

Тогда

$$\int \frac{1}{2-\sqrt{x}}dx = \int \frac{2tdt}{2-t} = -\int \frac{(2t-4)+4}{t-2}dt =$$
$$= \int \left(-2+\frac{4}{t-2}\right)dt = -2t+4\int \frac{1}{t-2}d(t-2) =$$
$$= -2t+4\ln|t-2|+C = -2\sqrt{x}+4\ln|\sqrt{x}-2|+C.$$

Ответ: $-2\sqrt{x}+4\ln|\sqrt{x}-2|+C.$

Задача 6.
Вычислить интеграл

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Указание

Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x).$$

Решение

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^3 x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \int \arcsin^3 x d(\arcsin x) \overset{t=\arcsin x}{=} \int t^3 dt =$$
$$= \frac{t^4}{4}+C = \frac{\arcsin^4 x}{4}+C.$$

Ответ: $\frac{\arcsin^4 x}{4}+C.$

Задача 7.
Вычислить интеграл

$$\int x^4 \cdot \sqrt[3]{2x^5-3}dx.$$

Указание

Сделайте замену:

$$t = 2x^5-3.$$

Решение

Сделаем замену:

$$t = 2x^5-3, \quad dt = (2x^5-3)'dx = 10x^4dx.$$

Умножив и разделив подынтегральное выражение на 10, получим:

$$\int x^4\cdot\sqrt[3]{2x^5-3}dx=\frac{1}{10}\int\sqrt[3]{2x^5-3}\cdot 10x^4dx=$$

$$=\frac{1}{10}\int\sqrt[3]{2x^5-3}d(2x^5-3)\overset{t=2x^5-3}{=}\frac{1}{10}\int t^{\frac{1}{3}}dt=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{40}(2x^5-3)^{\frac{4}{3}}+C.$$

Ответ: $\frac{3}{40}(2x^5-3)^{\frac{4}{3}}+C.$

Задача 8.
Вычислить интеграл

$$\int(3x-2)\cos 4xdx.$$

Указание

Примените формулу интегрирования по частям, $u = 3x - 2$.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям. Пусть $u = 3x - 2$, тогда

$$dv=\cos 4xdx,\quad v=\int dv=\int\cos 4xdx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos 4xd(4x)=\frac{1}{4}\sin 4x.$$

Следовательно,

$$\int(3x-2)\cos 4xdx=(3x-2)\frac{1}{4}\sin 4x-\int\frac{1}{4}\sin 4x\cdot d(3x-2)=$$

$$=\frac{1}{4}(3x-2)\sin 4x-\frac{3}{4}\int\sin 4xdx=$$

$$=\frac{1}{4}(3x-2)\sin 4x+\frac{3}{16}\cos 4x+C.$$

Ответ: $\frac{1}{4}(3x-2)\sin 4x+\frac{3}{16}\cos 4x+C.$

Задача 9.
Вычислить интеграл

$$\int x\, arctgx\, dx.$$

Указание

Примените формулу интегрирования по частям, $u = \mathrm{arctg}x$.

Решение

$$u = arctgx, \quad du = (arctgx)'dx = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$dv = xdx, \quad v = \int xdx = \frac{x^2}{2}.$$

$$\int x\, arctgx\, dx = arctgx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= arctgx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx =$$

$$= arctgx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= arctgx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \quad x - arctgx \quad + C =$$

$$\frac{(x^2+1)arctgx - x}{2} + C.$$

Ответ: $\frac{(x^2+1)arctgx - x}{2} + C.$

1.1.2. Комплексные числа, их изображение на плоскости. Алгебраические операции над комплексными числами. Комплексное сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Корни из комплексных чисел. Показательная функция комплексного аргумента. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

При изучении одного из основных приемов интегрирования: интегрирования рациональных дробей – требуется для проведения строгих доказательств рассматривать многочлены в комплексной области. Поэтому изучим предварительно некоторые свойства комплексных чисел и операций над ними.

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (a,b) : $z = (a,b)$ (термин «упорядоченная» означает, что в записи комплексного числа важен порядок чисел a и b: (a,b) не равно (b,a)). При этом первое число a называется **действительной частью** комплексного числа z и обозначается $a = \mathrm{Re}\, z$, а второе число b называется **мнимой частью** z: $b = \mathrm{Im}\, z$.

Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ **равны** тогда и только тогда, когда у них равны действительные и мнимые части, то есть $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Действия над комплексными числами

1. **Суммой** комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a,b)$ такое, что $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$.

Свойства сложения:

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

б) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;

в) существует комплексное число $0 = (0,0)$: $z + 0 = z$ для любого комплексного числа z.

2. **Произведением** комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a,b)$ такое, что $a = a_1a_2 - b_1b_2$, $b = a_1b_2 + a_2b_1$. Свойства умножения:

а) $z_1z_2 = z_2z_1$;

б) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$,

в) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

Замечание. Подмножеством множества комплексных чисел является множество действительных чисел, определяемых как комплексные числа вида $(a,0)$. Можно убедиться, что при этом определение операций над комплексными числами сохраняет известные правила соответствующих операций над действительными числами. Кроме того, действительное число $1 = (1,0)$ сохраняет свое свойство при умножении на любое комплексное число: $1 \cdot z = z$.

Комплексное число $(0, b)$ называется **чисто мнимым**. В частности, число $(0,1)$ называют **мнимой единицей** и обозначают символом i.

Свойства мнимой единицы:

1) $i \cdot i = i^2 = -1$;

2) чисто мнимое число $(0,b)$ можно представить как произведение действительного числа $(b,0)$ и i: $(b,0) = b \cdot i$.

Следовательно, любое комплексное число $z = (a,b)$ можно представить в виде: $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + ib$.

Запись вида

$$\boxed{z = a + ib \quad (1)}$$

называют **алгебраической формой** записи комплексного числа.

Замечание. Алгебраическая запись комплексных чисел позволяет производить операции над ними по обычным правилам алгебры.

Комплексное число

$$\overline{z} = a - ib$$

называется **комплексно сопряженным** числу $z = a + ib$.

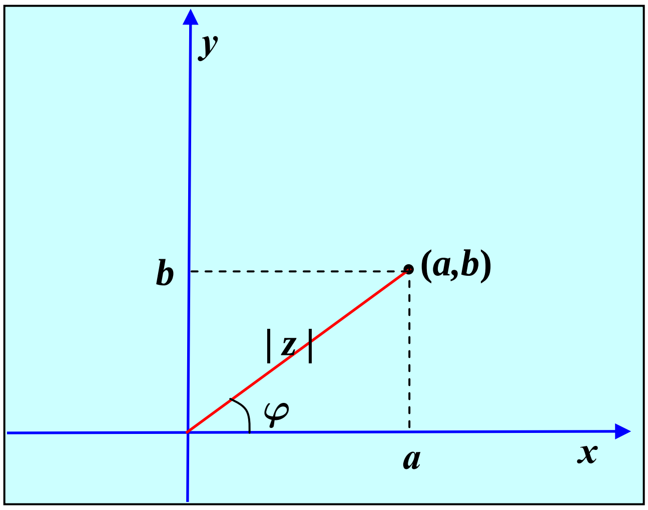
3. **Вычитание** комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению: $z = (a,b)$ называется разностью комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$, если $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$.

4. **Деление** комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению: число $z = a + ib$ называется частным от деления $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ ($z_2 \neq 0$), если $z_1 = z \cdot z_2$. Следовательно, действительную и мнимую части частного можно найти из решения системы уравнений:

$$a_2 a - b_2 b = a_1,\ b_2 a + a_2 b = b_1.$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексное число $z = (a,b)$ можно представить в виде точки на плоскости с координатами (a,b) или вектора с началом в начале координат и концом в точке (a,b).



При этом модуль полученного вектора называется **модулем** комплексного числа, а угол, образованный вектором с положительным направлением оси абсцисс,- **аргументом** числа. Учитывая, что $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \sin \varphi$, где $\rho = |z|$ - модуль z, а $\varphi = \arg z$ – его аргумент, можно получить еще одну форму записи комплексного числа:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2)$$

Запись такого вида называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа.

В свою очередь, модуль и аргумент комплексного числа можно выразить через a и b:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tg\varphi = \frac{b}{a}.$$

Следовательно, аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Легко убедиться, что операция сложения комплексных чисел соответствует операции сложения векторов. Рассмотрим геометрическую интерпретацию умножения. Пусть

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

тогда

$$\begin{gathered} z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = \rho_1\rho_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \\ = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{gathered}$$

Следовательно, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент – сумме их аргументов. Соответственно, при делении модуль частного равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент – разности их аргументов.

Частным случаем операции умножения является возведение в степень:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad -$$

- **формула Муавра**.

Используя полученные соотношения, перечислим основные свойства комплексно сопряженных чисел:

1. $|\bar{z}| = |z|, \arg\bar{z} = -\arg z.$
2. $z\bar{z} = |z|^2.$
3. $\bar{\bar{z}} = z.$
4. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$
5. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$
6. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2.$
7. $\overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2.$

Извлечение корня из комплексного числа

Комплексное число $z_1 = \sqrt[n]{z}$ называется **корнем *n*-й степени** из z, если $z = z_1^n$.

Из определения следует, что

$$\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi}{n}.$$

Так как аргумент комплексного числа определен не однозначно, можно получить n различных значений для аргумента z_1:

$$\varphi_k = \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n},$$

где φ_0 – одно из значений arg z, а k = 1, 2,…, n-1. Окончательно формулу, задающую все значения $\sqrt[n]{z}$, можно записать в виде:

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right),$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Пример.

Число z = 16 можно представить в тригонометрической форме следующим образом: z = 16(cos0 + $i$sin0). Найдем все значения $\sqrt[4]{16}$:

$$z_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2,$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

Показательная форма комплексного числа

Введем еще одну форму записи комплексного числа. На множестве комплексных чисел существует связь между тригонометрическими и показательными функциями, задаваемая **формулой Эйлера**:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

справедливость которой будет доказана в дальнейшем. Используя эту формулу, можно получить еще один вид комплексного числа:

$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (3)$$

Запись такого вида называется **показательной формой** записи комплексного числа.

Представление (3) позволяет легко интерпретировать с геометрической точки зрения операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, используя известные свойства показательной функции.

Примеры решения задач

Задача 1.
Для комплексных чисел $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = 5 + 3i$ найти число, комплексно сопряженное числу $z_1 + z_2$.

Указание

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$
$$z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi.$$

Решение

$$z_1 + z_2 = (3+5) + (-2+3)i = 8 + i,$$
$$\overline{(z_1 + z_2)} = 8 - i.$$

Ответ: $8 - i$.

Задача 2.
Для комплексных чисел $z_1 = 4 - i$ и $z_2 = 3 + 4i$ найти $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Указание

Умножьте числитель и знаменатель дроби

$$\frac{4-i}{3+4i}$$

на выражение, сопряженное знаменателю.

Решение

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-i}{3+4i} = \frac{(4-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{12-19i+4i^2}{9-16\cdot i^2} =$$
$$= \frac{12-19i-4}{9+16} = \frac{8-19i}{25} = 0{,}32 - 0{,}76i.$$

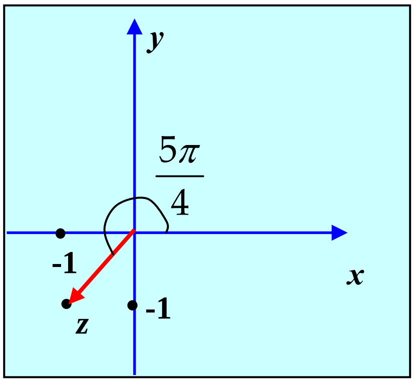
Ответ: $0{,}32 - 0{,}76i$.

Задача 3.
Найти аргумент комплексного числа $z = -1 - i$.

Указание

Найдите угол, образованный вектором (-1,-1) и положительным направлением оси абсцисс.

Решение



Вектор (-1,-1) образует с осью Ox угол $\frac{5\pi}{4}$, который является аргументом числа $-1 - i$.

Ответ: $\frac{5\pi}{4}$.

Задача 4.
Найти модуль числа $z_1z_2 + z_3$, если $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -4 + 5i$.

Указание

Найдите действительную и мнимую части числа $z_1z_2 + z_3$ и воспользуйтесь формулой

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Решение

$$z_1z_2 = (1-5i)(2+i) = 2 - 9i - 5i^2 = 7 - 9i;$$
$$z_1z_2 + z_3 = (7-4) + (-9+5)i = 3 + 4i;$$
$$|z_1z_2 + z_3| = \sqrt{9+16} = 5.$$

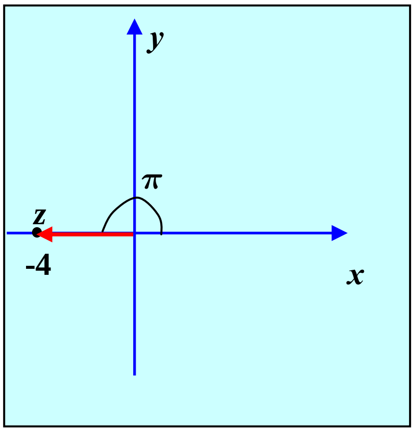
Ответ: 5.

Задача 5.
Записать в тригонометрической форме число -4.

Указание

Рассмотрите на плоскости вектор (-4,0).

Решение



Задачу можно решить, исходя из геометрических соображений: модуль вектора (-4,0) равен 4, а угол, который он образует с осью Ox, равен π. Следовательно, -4 = 4(cosπ + i sinπ).

Второй способ решения задачи:

$$a=-4,\, b=0 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+0} = 4;$$

$$\arg z = \varphi,\, \cos\varphi = \frac{-4}{4} = -1,\, \sin\varphi = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi.$$

$$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Ответ: $4\ \ \cos\pi + i\sin\pi$.

Задача 6.

Вычислить

$$\sqrt{3} - i\ ^{20}.$$

Указание

Представьте данное число в тригонометрической форме.

Решение

$$|\sqrt{3}-i| = \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right);$$

$$\sqrt{3} - i\ ^{20} = 2^{20}\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{20\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^{20}\left(\cos\left(-4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$= 2^{20}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2^{20}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$$

$$= 2^{19}(-1+\sqrt{3}i).$$

Ответ: $2^{19}(-1+\sqrt{3}i)$.

Задача 7.

Указать значение $\sqrt[6]{-1}$ с наименьшей мнимой частью.

Указание

Представьте -1 в тригонометрической форме и найдите все 6 значений $\sqrt[6]{-1}$.

Решение

$$-1 = 1\cdot\ \cos(\pi+2\pi n)+i\sin(\pi+2\pi n)\ .$$

$$\sqrt[6]{-1}\ {}_0 = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$\sqrt[6]{-1}\ {}_1 = \cos\frac{\pi+2\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{6}=$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i;$$

$$\sqrt[6]{-1}\ {}_2 = \cos\frac{\pi+4\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{6}=$$

$$=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$\sqrt[6]{-1}\ {}_3 = \cos\frac{\pi+6\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{6}=$$

$$=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;$$

$$\sqrt[6]{-1}\ {}_4 = \cos\frac{\pi+8\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+8\pi}{6}=$$

$$=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i;$$

$$\sqrt[6]{-1}\ {}_5 = \cos\frac{\pi+10\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+10\pi}{6}=$$

$$=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Среди найденных чисел наименьшую мнимую часть, равную -1, имеет число $-i$.
Ответ: $-i$.

1.1.3. Многочлены и их корни. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на линейные множители в поле комплексных чисел. Простые и кратные корни многочлена. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Рациональные функции. Деление многочленов, выделение целой части рациональной функции. Правильные рациональные функции, их разложение на простейшие

Рассмотрим в комплексной области **многочлен**, то есть функцию вида

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, ,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, z$ – - комплексные числа. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются **коэффициентами** многочлена, а натуральное число n – его **степенью.**
Два многочлена

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

$$\text{и} \quad Q_m(z) = b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0$$

равны тогда и только тогда, когда $m=n$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.
Число z_0 называется **корнем многочлена** $P_n(z)$, если $P_n(z_0) = 0$.

Теорема 1 (теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $z - z_0$ (z_0 – не обязательно корень многочлена) равен $P(z_0)$.
Доказательство.
Разделив $P(z)$ на $z - z_0$, получим: $P(z) = Q(z)(z - z_0) + r$, где число r – остаток от деления, а $Q(z)$ – многочлен степени, меньшей n. При подстановке в это равенство $z = z_0$ найдем, что $r = P(z_0)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен в комплексной области имеет корень (без доказательства).

Разложение многочлена в комплексной области на линейные множители

Пусть $P_n(z)$ – многочлен степени n, а z_1 – его корень. Тогда по теореме Безу $P_n(z)$ можно представить в виде:

$$P_n(z) = (z - z_1)\, Q_{n-1}(z),$$

где Q_{n-1} – многочлен степени $n - 1$. Если при этом $Q_{n-1}(z_1) = 0$, его вновь можно представить как $(z - z_1)Q_{n-2}(z)$, а $P_n(z) = (z - z_1)Q_{n-2}(z)$.

Натуральное число k_1 называется **кратностью** корня z_1 многочлена $P_n(z)$, если этот многочлен делится на $(z-z_1)^{k_1}$, но не делится на $(z-z_1)^{k_1+1}$. Корень кратности 1 называется **простым,** а корень кратности, большей 1, - **кратным**.

Итак, если z_1 – корень P_n кратности k_1, то

$$P_n(z)=(z-z_1)^{k_1}Q_{n-k_1}(z), Q_{n-k_1}(z_1)\neq 0.$$

Из основной теоремы алгебры следует, что многочлен $Q_{n-k_1}(z)$ тоже имеет корень. Обозначим его z_2, а его кратность k_2. Тогда

$$Q_{n-k_1}(z)=(z-z_2)^{k_2}Q_{n-k_1-k_2}(z),$$

а

$$P_n(z)=(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}Q_{n-k_1-k_2}(z)=$$
$$...=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}...(z-z_N)^{k_N}, \qquad (1)$$

где

$$z_i\neq z_j, \quad k_1+k_2+...+k_N=n.$$

Следовательно, в комплексной области всякий многочлен можно разложить на линейные множители.

Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители

Определим для $P_n(z)$ многочлен

$$\overline{P}_n(z)=\overline{a}_n z^n+...+\overline{a}_1 z+\overline{a}_0,$$

где $\overline{a}_i$ - число, комплексно сопряженное коэффициенту a_i. При этом

$$\overline{P_n(z)}=\overline{P}_n(\overline{z}).$$

Следовательно, если z_0 – корень P_n, то $\overline{z}_0$ - корень $\overline{P}_n$. Если коэффициенты P_n – действительные числа, то

$$\overline{P}_n(z)=P_n(z),$$

и если $z_0 = a + ib$ – его корень кратности k, то $\overline{z}_0=a-ib$ – тоже его корень, причем той же кратности. Но

$$(x-z_0)(x-\overline{z}_0)=(x-a-ib)(x-a+ib)=$$
$$=x^2-2ax+a^2+b^2=x^2+px+q \quad -$$

квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом. Если теперь применить к многочлену с действительными коэффициентами от действительной переменной $P_n(x)$ формулу (1), то

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot$$
$$\cdot...(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

то есть **всякий многочлен на множестве действительных чисел можно разложить на множители степени не выше второй**.

Рациональные дроби

Если *P(z)* и *Q(z)* – многочлены в комплексной области, то $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ – рациональная дробь. Она называется **правильной**, если степень *P(z)* меньше степени *Q(z)*, и **неправильной**, если степень *P* не меньше степени *Q*. Любую неправильную дробь можно представить в виде:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=S(z)+\frac{R(z)}{Q(z)},$$

где *P(z) = Q(z) S(z) + R(z),* а *R(z)* – многочлен, степень которого меньше степени *Q(z).* Таким образом, интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию многочленов, то есть степенных функций, и правильных дробей, так как $\dfrac{R(z)}{Q(z)}$ является правильной дробью.

Лемма 1. Если $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ – правильная рациональная дробь и z_0 – корень ее знаменателя кратности *k*, т.е.

$$Q(z)=(z-z_0)^k Q_1(z),\quad Q_1(z)\neq 0,$$

то существуют число А и многочлен $P_1(z)$ такие, что

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A}{(z-z_0)^k}+\frac{P_1(z)}{(z-z_0)^{k-1}Q_1(z)},$$

где последнее слагаемое является правильной дробью.

Доказательство.

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)}{(z-z_0)^k Q_1(z)}=$$

$$=\frac{A}{(z-z_0)^k}+\left(\frac{P(z)}{(z-z_0)^k Q_1(z)}-\frac{A}{(z-z_0)^k}\right)=\frac{A}{(z-z_0)^k}+\frac{P(z)-AQ_1(z)}{(z-z_0)^k Q_1(z)}.$$

При этом последнее слагаемое является правильной дробью. Выберем число А так, чтобы z_0 было корнем многочлена $P(z)-AQ_1(z)$, то есть

$$A=\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}.$$

Тогда по теореме Безу

$$\frac{P(z)-AQ_1(z)}{(z-z_0)^k Q_1(z)}=\frac{P_1(z)}{(z-z_0)^{k-1}Q_1(z)}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Если коэффициенты многочленов P и Q и выбранный корень знаменателя – действительные числа, то и коэффициенты многочленов P_1 и Q_1 – тоже действительные числа.

Теорема 3. Если $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ – правильная рациональная дробь и

$$Q(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_N)^{k_N},$$

то существуют такие комплексные числа

$$A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, \dots, A_j^{k_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

что

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{A_j^{(1)}}{z - z_j} + \frac{A_j^{(2)}}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(z - z_j)^{k_j}} \right). \qquad (2)$$

Доказательство.

Применив k_1 раз лемму 1 к дроби $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, получим:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1^{(k_1)}}{(z - z_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(k_1 - 1)}}{(z - z_1)^{k_1 - 1}} + \dots + \frac{A_1^{(1)}}{z - z_1} + \frac{P^*(z)}{Q^*(z)},$$

где

$$Q^*(z) = (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_N)^{k_N}.$$

Применяя затем ту же лемму к остальным корням знаменателя, придем к формуле (2).

Лемма 2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, причем $Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x)$, где $p^2 - 4q < 0$. Тогда существуют такие действительные числа B, C и многочлен с действительными коэффициентами $P_1(x)$, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)}, \qquad (3)$$

где последнее слагаемое тоже является правильной дробью.

Доказательство.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} =$$

$$= \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \left(\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} - \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} \right) =$$

$$= \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P(x) - (Bx + C)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)}, \qquad (4)$$

где последнее слагаемое является правильной дробью. Выберем B и C такими, чтобы число $z_0 = x_0 + iy_0$ (корень многочлена $z^2 + pz + q$) было корнем многочлена $P(x)-(Bx+C)Q_1(x)$. Можно показать, что при этом

$$B = \frac{b}{y_0}, \quad C = a - \frac{x_0}{y_0} b,$$

где

$$a + ib = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)}.$$

Следовательно, B и C – действительные числа, а z_0 и $\bar{z}_0$ (число, комплексно сопряженное z_0) – корни многочлена $P(x)-(Bx+C)Q_1(x)$. Тогда по теореме Безу он делится на

$$(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = x^2 + px + q.$$

Поэтому последнюю дробь в равенстве (4) можно сократить на $x^2 + px + q$ и получить равенство (3).

Используя эту лемму, можно доказать следующую теорему:

Теорема 4. Если $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, а

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s},$$

где

$$p_i^2 - 4q_i < 0,$$

то существуют такие действительные числа

$$A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, \ldots, A_j^{(k_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, r; \quad B_i^{(1)}, B_i^{(2)}, \ldots, B_i^{(m_i)},$$

$$C_i^{(1)}, C_i^{(2)}, \ldots, C_i^{(m_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{A_j^{(1)}}{x - x_j} + \ldots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(x - x_j)^{k_j}} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{B_i^{(1)} x + C_i^{(1)}}{x^2 + p_i x + q_i} + \ldots + \frac{B_i^{(m_i)} x + C_i^{(m_i)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}} \right).$$

Примеры.

$$1. \quad \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax + 3A + Bx + 2B}{(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{(A+B)x + (3A+2B)}{(x+2)(x+3)}.$$

Полученная дробь должна совпадать с исходной при любых x, следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях обеих дробей должны быть равными. Отсюда

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases}'$$

то есть A = 1, B = -1. Следовательно, исходную дробь, знаменатель которой имеет только действительные корни (причем простые, то есть кратности 1) можно представить в виде:

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$$

2. $$\frac{4x^3+4x^2+2x-24}{x^4+2x^3+8x^2}=\frac{4x^3+4x^2+2x-24}{x^2(x^2+2x+8)}=$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+8}=$$

$$=\frac{Ax^3+2Ax^2+8Ax+Bx^2+2Bx+8B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+2x+8)}=$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(8A+2B)x+8B}{x^2(x^2+2x+8)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях, получаем:

$$\begin{cases} A+C=4 \\ 2A+B+D=4 \\ 8A+2B=2 \\ 8B=-24 \end{cases},$$

откуда A = 1, B = -3, C = 3, D = 5. Таким образом, данную дробь, знаменатель которой имеет действительный корень x = 0 кратности 2 и комплексно сопряженные корни $-1\pm i\sqrt{7}$, преобразуем в сумму дробей:

$$\frac{4x^3+4x^2+2x-24}{x^4+2x^3+8x^2}=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2x+5}{x^2+2x+8}.$$

Примеры решения задач

Задача 1.

Выделить целую часть дроби

$$\frac{2x^4+15x^3+x^2-5x-8}{x^2+8x+9}.$$

Указание

Разделите «уголком» числитель на знаменатель.

Решение

$$2x^4+15x^3+x^2-5x-8=$$
$$=(2x^4+16x^3+18x^2)-x^3-17x^2-5x-8=$$
$$=2x^2(x^2+8x+9)-(x^3+8x^2+9x)-9x^2+4x-8=$$
$$=(2x^2-x)(x^2+8x+9)-(9x^2+72x+81)+76x+73=$$
$$=(2x^2-x-9)(x^2+8x+9)+76x+73.$$

Следовательно,

$$\frac{2x^4+15x^3+x^2-5x-8}{x^2+8x+9}=$$
$$=\frac{(2x^2-x-9)(x^2+8x+9)+76x+73}{x^2+8x+9}=$$
$$=2x^2-x-9+\frac{76x+73}{x^2+8x+9}.$$

Ответ: $2x^2-x-9$.

Задача 2.

Разложить дробь

$$\frac{6x^2+10x+2}{x^3+3x^2+2x}$$

в сумму простейших.

Указание

Разложите знаменатель дроби на линейные множители.

Решение

$$x^3+3x^2+2x=x(x^2+3x+2)=x(x+1)(x+2);$$
$$\frac{6x^2+10x+2}{x^3+3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}=$$
$$=\frac{Ax^2+3Ax+2A+Bx^2+2Bx+Cx^2+Cx}{x(x+1)(x+2)}=$$
$$=\frac{(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A}{x(x+1)(x+2)}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A+B+C=6 \\ 3A+2B+C=10 \\ 2A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2. \\ C=3 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{6x^2+10x+2}{x^3+3x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x+2}$.

Задача 3.
Разложить дробь

$$\frac{4x^3-8x^2+8x-4}{x^4-4x^3+4x^2}$$

в сумму простейших.

Указание

Разложите знаменатель дроби на линейные множители.

Решение

$$x^4-4x^3+4x^2=x^2\quad x^2-4x+4\quad=x^2(x-2)^2.$$

Следовательно, знаменатель имеет два действительных корня: 0 и 2, причем кратность каждого из них равна 2. Тогда разложение дроби в сумму простейших имеет вид:

$$\frac{4x^3-8x^2+8x-4}{x^4-4x^3+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{Ax^3-4Ax^2+4Ax+Bx^2-4Bx+4B+Cx^3-2Cx^2+Dx^2}{x^2(x-2)^2}=$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(-4A+B-2C+D)x^2+(4A-4B)x+4B}{x^2(x-2)^2}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} A+C=4 \\ -4A+B-2C+D=-8 \\ 4A-4B=8 \\ 4B=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=3 \\ D=3 \end{cases}.$$

Значит,

$$\frac{4x^3-8x^2+8x-4}{x^4-4x^3+4x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{3}{(x-2)^2}$.

Задача 4.
Разложить дробь

$$\frac{5x^2+2x+13}{x^3+x^2+x+1}$$

в сумму простейших.

Указание

Разложите знаменатель дроби на множители первой и второй степени.

Решение

$$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x^2+1)(x+1).$$

$$\frac{5x^2+2x+13}{x^3+x^2+x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=$$

$$=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx+Bx+C}{(x+1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=5\\B+C=2\\A+C=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=8\\B=-3.\\C=5\end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{5x^2+2x+13}{x^3+x^2+x+1}=\frac{8}{x+1}-\frac{3x-5}{x^2+1}.$$

Ответ: $\dfrac{8}{x+1}-\dfrac{3x-5}{x^2+1}$.

1.1.4. Интегрирование простейших и произвольных правильных дробей. Интегрирование произвольных рациональных функций. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Было показано, что любую правильную рациональную дробь можно представить в виде линейной комбинации дробей вида:

$$1)\ \frac{A}{x-a},\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^n},$$

$$3)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\quad 4)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

$$(p^2-4q<0).$$

Эти дроби называются **простейшими** (или элементарными) **дробями**. Выясним, каким образом они интегрируются.

1) $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{1}{x-a}d(x-a) = A\ln|x-a| + C.$$

2) $$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) =$$

$$= \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A(n-1)}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

3) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+\frac{p^2}{4})+q-\frac{p^2}{4}}dx =$$

$$= \int \frac{A(x+\frac{p}{2})+B+A\frac{p}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}d(x+\frac{p}{2}).$$

Сделаем замену

$$t = x + \frac{p}{2}$$

и обозначим

$$B + A\frac{p}{2} = \tilde{B}, \quad q - \frac{p^2}{4} = c^2.$$

Тогда требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{At+\tilde{B}}{t^2+c^2}dt = \frac{A}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+c^2} + \tilde{B}\int \frac{1}{t^2+c^2}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+c^2)}{t^2+c^2} + \tilde{B}\int \frac{1}{t^2+c^2}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+c^2) + \frac{\tilde{B}}{c}arctg\frac{t}{c} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{\tilde{B}}{c}arctg\frac{2x-p}{2c} + C.$$

4) При интегрировании простейших дробей последнего типа воспользуемся той же заменой, что и в предыдущем случае, и представим подынтегральное выражение в виде:

$$\int \frac{At+\tilde{B}}{(t^2+c^2)^n}dt = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+c^2)}{(t^2+c^2)^n} + \tilde{B}\int \frac{1}{(t^2+c^2)^n}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\frac{(t^2+c^2)^{-n+1}}{-n+1} + \tilde{B}\cdot I_n,$$

где

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2+c^2)^n}dt.$$

Рассмотрим отдельно способ интегрирования I_n .

$$I_n = \frac{1}{c^2}\int \frac{t^2+c^2-t^2}{(t^2+c^2)^n}dt =$$

$$= \frac{1}{c^2}\int \frac{1}{(t^2+c^2)^{n-1}}dt - \frac{1}{c^2}\int t\frac{tdt}{(t^2+c^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{c^2}I_{n-1} + \frac{1}{2c^2(n-1)}\int td(t^2+c^2)^{-n+1} =$$

$$= \frac{1}{c^2}I_{n-1} + \frac{1}{2c^2(n-1)}\left(\frac{t}{(t^2+c^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{(t^2+c^2)^{n-1}}dt\right) =$$

$$= \frac{t}{2c^2(n-1)(t^2+c^2)^{n-1}} + \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)I_{n-1}.$$

Таким образом, получена рекуррентная формула, позволяющая в конечном счете свести вычисление этого интеграла к

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+c^2}dt = \frac{1}{c}arctg\frac{t}{c} + C.$$

Итак, **интеграл от любой простейшей дроби находится в явном виде и является элементарной функцией**.

Теорема 1. Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором ее знаменатель не равен нулю, существует и выражается через элементарные функции, а именно рациональные дроби, логарифмы и арктангенсы.

Доказательство.

Представим рациональную дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ в виде:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}.$$

При этом последнее слагаемое является правильной дробью, которую можно представить в виде линейной комбинации простейших дробей. Таким образом, интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена *S(x)* и простейших дробей, первообразные которых, как было показано, имеют вид, указанный в теореме.

Замечание. Основную трудность при этом составляет разложение знаменателя на множители, то есть поиск всех его корней.

Пример.

$$\int \frac{x^4+6x^3+12x^2+2x-24}{x^4+2x^3+8x^2}dx =$$

$$= \int (1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2x+5}{x^2+2x+8})dx =$$

$$= x+\ln|x|+\frac{3}{x}+\int \frac{2x+5}{x^2+2x+8}dx =$$

$$= x+\ln|x|+\frac{3}{x}+\int \frac{2(x+1)+3}{(x+1)^2+7}d(x+1) =$$

$$= x+\ln|x|+\frac{3}{x}+\int \frac{2(x+1)d(x+1)}{(x+1)^2+7}+3\int \frac{1}{(x+1)^2+7}d(x+1) =$$

$$= x+\ln|x|+\frac{3}{x}+3\ln(x^2+2x+8)+\frac{3}{\sqrt{7}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Из ранее доказанного следует, что любую рациональную дробь можно проинтегрировать, поэтому в дальнейшем будем считать задачу интегрирования функции выполненной, если удается представить эту функцию в виде рациональной дроби. В частности, для интегралов вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx,$$

где R – рациональная функция (многочлен или рациональная дробь), $r_1,\ldots,r_n$ – дроби с одним и тем же знаменателем m

$$\left(r_1=\frac{p_1}{m},\ldots,r_n=\frac{p_n}{m}\right),,$$

а $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$, замена

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$$

приводит к

$$x=\frac{dt^m-b}{a-ct^m}.$$

Таким образом, x является рациональной функцией t, следовательно, его производная тоже будет рациональной функцией. Кроме того,

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}=t^{p_i} \quad -$$

тоже рациональные функции от t (так как p_i – целое число). Поэтому после замены подынтегральное выражение примет вид $R_1\ (t)dt$, где R_1 – рациональная функция, интегрируемая описанными выше способами.

Замечание. С помощью подобных замен можно интегрировать функции вида

$$R(x,(ax+b)^{r_1},\ldots,(ax+b)^{r_n}),$$

и, в частности, $R(x,x^{r_1},\ldots,x^{r_n})$.

Примеры.

1) $\int\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}dx.$

Сделаем замену

$$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

тогда

$$x=\frac{t^2+1}{t^2-1},\quad a\quad dx=\frac{-4tdt}{(t^2-1)^2}.$$

Следовательно,

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\int\frac{-4t^2dt}{(t^2-1)^2}=\int\left(-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=$$

$$=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}+C=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1}+\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1}+C.$$

2) $\int\dfrac{x+\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx.$

Так как

$$\sqrt{x-2}=(x-2)^{\frac{1}{2}}=(x-2)^{\frac{3}{6}},$$

$$a\quad\sqrt[3]{x-2}=(x-2)^{\frac{1}{3}}=(x-2)^{\frac{2}{6}},$$

выберем в качестве новой переменной

$$t=(x-2)^{\frac{1}{6}}.$$

Тогда

$$x=t^6+2,\quad dx=6t^5dt.$$

Поэтому

$$\int \frac{x+\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx = \int \frac{(t^6+2+t^3)6t^5dt}{t^2} =$$

$$= 6\int (t^9+t^6+2t^3)dt = \frac{3}{5}t^{10}+\frac{6}{7}t^7+3t^4+C =$$

$$= \frac{3}{5}(x-2)^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{7}(x-2)^{\frac{7}{6}}+3(x-2)^{\frac{2}{3}}+C.$$

Примеры решения задач

Задача 1.
Вычислить интеграл

$$\int \frac{3x-19}{x^2-x-6}dx.$$

Указание

Разложите подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

Решение

$$\frac{3x-19}{x^2-x-6} = \frac{3x-19}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3} =$$

$$= \frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B)x+(-3A+2B)}{(x+2)(x-3)};$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -3A+2B=-19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-2 \end{cases}.$$

$$\int \frac{3x-19}{x^2-x-6}dx = \int \left(\frac{5}{x+2}-\frac{2}{x-3}\right)dx =$$

$$= 5\ln|x+2|-2\ln|x-3|+C.$$

Ответ: $5\ln|x+2|-2\ln|x-3|+C.$

Задача 2.
Вычислить интеграл

$$\int \frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx.$$

Указание

Разложите подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

Решение

$$\frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x(x-1)^3}=$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{Ax^3-3Ax^2+3Ax-A+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-Cx+Dx}{x(x-1)^3}=$$

$$=\frac{(A+B)x^3+(-3A-2B+C)x^2+(3A+B-C+D)x-A}{x(x-1)^3};$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B+C=-3 \\ 3A+B-C+D=2 \\ -A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ C=3 \\ D=-1 \end{cases}.$$

$$\int\frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3}\right)dx=$$

$$=2\ln|x|-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{2(x-1)^2}+C.$$

Ответ: $2\ln|x|-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{2(x-1)^2}+C.$

Задача 3.
Вычислить интеграл

$$\int\frac{3}{x^3+8}dx.$$

Указание

Разложите подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

Решение

$$\frac{3}{x^3+8}=\frac{3}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=$$

$$\frac{Ax^2-2Ax+4A+Bx^2+Cx+2Bx+2C}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+(4A+2C)}{(x+2)(x^2-2x+4)};$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=0 \\ 4A+2C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{16} \\ B=-\dfrac{1}{16} \\ C=\dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\int\frac{3}{x^3+8}dx=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{x-4}{x^2-2x+4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\ln|x+2|-\frac{1}{16}\int\frac{(x-1)-3}{(x-1)^2+3}d(x-1)\overset{t=x-1}{=}$$

$$=\frac{1}{16}\ln|x+2|-\frac{1}{16}\int\frac{tdt}{t^2+3}+\frac{3}{16}\int\frac{1}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{1}{16}\ln|x+2|-\frac{1}{8}\ln(t^2+3)+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{16}\ln|x+2|-\frac{1}{8}\ln(x^2-2x+4)+\frac{\sqrt{3}}{16}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Ответ: $\dfrac{1}{16}\ln|x+2|-\dfrac{1}{8}\ln(x^2-2x+4)+\dfrac{\sqrt{3}}{16}arctg\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$

Задача 4.
Вычислить интеграл

$$\int\frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)}dx.$$

Указание

Подынтегральная функция – неправильная дробь, поэтому вначале выделите ее целую часть, а затем разложите оставшуюся правильную дробь в сумму простейших.

Решение

$$\frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{x^5}{x^4+5x^2+4}=\frac{(x^5+5x^3+4x)-5x^3-4x}{x^4+5x^2+4}=$$

$$=x-\frac{5x^3+4x}{x^4+5x^2+4};$$

$$\frac{5x^3+4x}{x^4+5x^2+4}=\frac{5x^3+4x}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=$$

$$= \frac{Ax^3 + Bx^2 + 4Ax + 4B + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D}{(x^2+1)(x^2+4)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (4A+C)x + (4B+D)}{(x^2+1)(x^2+4)};$$

$$\begin{cases} A + C = 5 \\ B + D = 0 \\ 4A + C = 4 \\ 4B + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = D = 0. \\ C = \dfrac{16}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int \left(x + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x^2+1} - \frac{8}{3} \cdot \frac{2x}{x^2+4} dx \right) =$$

$$= \int x dx + \frac{1}{6} \int \frac{2x dx}{x^2+1} - \frac{8}{3} \int \frac{2x dx}{x^2+4} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) - \frac{8}{3} \ln(x^2+4) + C.$$

Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{6} \ln(x^2+1) - \dfrac{8}{3} \ln(x^2+4) + C.$

Задача 5.

Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}.$$

Указание

Сделайте замену: $t = x^{\frac{1}{12}}$.

Решение

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{12}}, \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{12}}.$$

$$t = x^{\frac{1}{12}} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = t^4, \sqrt[4]{x} = t^3, x = t^{12}, dx = 12t^{11} dt.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{12t^{11} dt}{t^4 - t^3} = 12 \int \frac{t^8 dt}{t-1} =$$

$$= 12 \int \left(t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$=12\left(\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=$$

$$=12\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{8}+\frac{x^{\frac{7}{12}}}{7}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{6}+\frac{x^{\frac{5}{12}}}{5}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{4}+\frac{x^{\frac{1}{4}}}{3}+\frac{x^{\frac{1}{6}}}{2}+x^{\frac{1}{12}}+\ln|x^{\frac{1}{12}}-1|\right)+C.$$

Ответ: $12\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{8}+\frac{x^{\frac{7}{12}}}{7}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{6}+\frac{x^{\frac{5}{12}}}{5}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{4}+\frac{x^{\frac{1}{4}}}{3}+\frac{x^{\frac{1}{6}}}{2}+x^{\frac{1}{12}}+\ln|x^{\frac{1}{12}}-1|\right)+C.$

Задача 6.

Вычислить интеграл

$$\int\sqrt{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x}.$$

Указание

Сделайте замену:

$$t=\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

Решение

$$t=\sqrt{\frac{x}{x+1}},\quad x=\frac{t^2}{t^2-1},\quad dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}.$$

$$\int\sqrt{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x}=\int\frac{t(t^2-1)(-2t)dt}{(t^2-1)^2t^2}=$$

$$=\int\frac{-2}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=\ln|t+1|-\ln|t-1|+C=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\right|+C.$$

Ответ: $\ln\left|\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\right|+C.$

1.1.5. Интегрирование рациональных тригонометрических выражений. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Интегрируемость в элементарных функциях

Рассмотрим интегрирование некоторых тригонометрических выражений.

1. **Интегралы вида**

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

вычисляются с применением формул

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x),$$
$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x),$$
$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x).$$

Пример.

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$
$$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

2. **Интегралы вида**

$$\int \sin^n x \cos^m x dx,$$

где m и n – целые числа, интегрируются с помощью замен:

а) если хотя бы одно из чисел m,n – нечетное (например, m), можно сделать замену $t = \sin x$ (или $t = \cos x$ при нечетном n).

Пример 1.

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx =$$
$$= \int \sin^4 x(1-\sin^2 x) d\sin x =$$
$$= \int t^4(1-t^2)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\sin x dx =$$

$$= -\int \frac{\cos^2 x}{(1-\cos^2 x)^2}d\cos x = -\int \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln|1-t| - \frac{1}{1-t} + \ln|1+t| + \frac{1}{1+t} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\cos x} - \frac{1}{1-\cos x} + \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right) + C.$$

б) если m и n – четные положительные числа, можно понизить степени тригонометрических функций с помощью формул

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример 3.

$$\int \sin^8 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^4 dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int 1 + 4\cos 2x + 6\cos^2 2x + 4\cos^3 2x + \cos^4 2x \ \ dx =$$

$$= \frac{x}{16} + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 2x -$$

$$-\frac{2}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{64}\int (1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x)dx =$$

$$= \frac{17}{64}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^3 2x + \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{1}{128}\int (1+\cos 8x)dx =$$

$$= \frac{35}{128}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^2 2x + \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C.$$

в) если m и n – четные и хотя бы одно из них отрицательно, можно применить замену $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$

Пример 4.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^4 x} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int tg^2 x (1 + tg^2 x)^2 dtgx = \int (t^2 + 2t^4 + t^6) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3} tg^3 x + \frac{2}{5} tg^5 x + \frac{1}{7} tg^7 x + C.$$

3. **Интегралы вида**

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

где R – рациональная функция, сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$t = tg \frac{x}{2},$$

тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

то есть все составляющие подынтегрального выражения представляют собой рациональные функции от t.

Пример 5.

$$\int \frac{1}{1-\sin x} dx = 2 \int \frac{dt}{\left(1 - \frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t} + C = \frac{2}{1 - tg \frac{x}{2}} + C.$$

Если подынтегральная функция имеет вид R ($\sin^2 x$, $\cos^2 x$), можно выбрать замену t = tg x. При этом

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

$$x = arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

и степень полученной рациональной функции будет ниже, чем при универсальной тригонометрической подстановке, что облегчает дальнейшее интегрирование.

Пример 6.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x - 4\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{4}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2-4} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \ \ln|t-2| - \ln|t+2| \ + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{tgx-2}{tgx+2} \right| + C.$$

Интегрирование квадратичных иррациональностей

При вычислении интегралов

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx$$

свести подынтегральную функцию к рациональной помогают замены:

$a)$ $x = a\sin t,$

при этом

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a\cos t;$$

$$dx = a\cos t dt, \quad t = \arcsin \frac{x}{a}.$$

$б)$ $x = atgt,$

тогда

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2(1+tg^2 t)} = \frac{a}{\cos t};$$

$$dx = \frac{adt}{\cos^2 t}, \quad t = arctg \frac{x}{a}.$$

$в)$ $x = \frac{a}{\sin t},$

соответственно

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}} = \frac{a\cos t}{\sin t};$$

$$dx = -\frac{a\cos t dt}{\sin^2 t}, \quad t = \arcsin \frac{a}{x}.$$

Пример 7.

Вычислим интеграл

$$\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

Пусть

$$x = 2\sin t,$$

тогда

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t dt =$$

$$= 4\int \sin^2 2t dt = 2\int (1-\cos 4t)dt = 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin(4\arcsin\frac{x}{2}) + C.$$

Заметим, что

$$\sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t = 4\sin t\cos t\cos 2t =$$

$$= 4\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}(1-2\sin^2 t) =$$

$$= 2x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}(1-\frac{x^2}{2}) = \frac{x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

.

Поэтому ответ можно представить в виде:

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$$

Пример 8.

Для вычисления интеграла

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$$

выберем замену *x* = 3tg *t*. При этом

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx = \int \frac{3}{\cos t\cdot 9tg^2 t}\frac{3dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{1}{\cos t\sin^2 t}dt = \int \frac{d\sin t}{\sin^2 t(1-\sin^2 t)} = \int \frac{du}{u^2(1-u)(1+u)},$$

где $u = \sin t$. Представив подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, получим:

$$\int \frac{du}{u^2(1-u)(1+u)} = \int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sin t} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{9+x^2}}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{9+x^2}+x}{\sqrt{9+x^2}-x} + C.$$

(Учитываем, что

$$\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\ ).$$

Пример 9.
Вычислим интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$$

с помощью замены

$$x = \frac{1}{\sin t}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{\sin^2 t \cdot \sin t}{\cos t}\frac{(-\cos t)dt}{\sin^2 t} = -\int \sin t dt =$$

$$= \cos t + C = \cos(\arcsin\frac{1}{x}) + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

Интегрируемость в элементарных функциях

В предыдущих лекциях рассмотрены методы интегрирования некоторых элементарных функций. Однако далеко не все элементарные функции интегрируемы, то есть имеют первообразные, также являющиеся элементарными функциями. В качестве примеров можно привести функции

$$e^{-x^2},\quad \sin x^2,\quad \frac{\sin x}{x},\quad \frac{1}{\ln x}$$

и другие. Этим операция интегрирования отличается от дифференцирования, при котором производная любой элементарной функции является тоже элементарной функцией. Для отыскания интегралов от функций, не имеющих элементарной первообразной, вводятся и используются новые классы функций, не являющихся элементарными.

Примеры решения задач

Задача 1.
Вычислить интеграл

$$\int \sin 5x \cos 2x dx.$$

Указание

Преобразуйте подынтегральное выражение, воспользовавшись формулой

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\ \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\ .$$

Решение

$$\int \sin 5x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \ \sin 7x + \sin 3x \ \ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{3}\cos 3x \right) + C = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

Задача 2.
Вычислить интеграл

$$\int \sin^6 x \sin 2x dx.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

и сделайте замену $t = \sin x$.

Решение

$$\int \sin^6 x \sin 2x dx = \int 2\sin^7 x \cos x dx =$$

$$= 2\int \sin^7 x d\sin x = 2 \cdot \frac{\sin^8 x}{8} + C = \frac{\sin^8 x}{4} + C.$$

Ответ: $\frac{\sin^8 x}{4} + C.$

Задача 3.
Вычислить интеграл

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$$

Указание

Понизьте степень тригонометрических функций, входящих в подынтегральное выражение, с помощью формул

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$и \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Решение

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \; 4\sin^2 x \cos^2 x \;\; \sin^2 x dx =$$

$$\frac{1}{4} \int \sin^2 2x \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \; 1 - \cos 4x \;\; dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

Ответ: $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$

Задача 4.
Вычислить интеграл

$$\int ctg^6 x dx.$$

Указание

Сделайте замену t = ctg x.

Решение

$$\int ctg^6 x dx = \int ctg^4 x \cdot \cos^2 x \left(\frac{dx}{\sin^2 x} \right) =$$

$$= -\int ctg^4 x \frac{ctg^2 x}{1 + ctg^2 x} dctgx \overset{t=ctgx}{=} - \int \frac{t^6}{t^2+1} dt =$$

$$= -\int \frac{(t^6+1)-1}{t^2+1} dt = -\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt =$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t - arcctgt + C = \frac{ctg^3 x}{3} - \frac{ctg^5 x}{5} - ctgx - x + C.$$

Ответ: $\frac{ctg^3 x}{3} - \frac{ctg^5 x}{5} - ctgx - x + C.$

Задача 5.
Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx.$$

Указание

Сделайте замену $x = 2\sin t$.

Решение

$$x = 2\sin t \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t,$$

$$dx = 2\cos t dt;$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx = \int \frac{2\cos t \cdot 2\cos t dt}{2\sin t} = \int \frac{2\cos^2 t}{\sin^2 t}\sin t dt =$$

$$= -\int \frac{2\cos^2 t}{1-\cos^2 t} d\cos t \overset{u=\cos t}{=} \int \frac{2u^2 du}{u^2-1} =$$

$$= \int\left(2 + \frac{2}{u^2-1}\right)du = \int\left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du =$$

$$= 2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

Сделаем обратную замену, учитывая, что

$$\sin t = \frac{x}{2} \Rightarrow u = \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}:$$

$$2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \sqrt{4-x^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right| + C.$$

Ответ: $\sqrt{4-x^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right| + C.$

Задача 6.

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx.$$

Указание

Сделайте замену $x = 3\text{tg}t$.

Решение

$$x = 3tgt \Rightarrow \sqrt{x^2+9} = 3\sqrt{tg^2 t + 1} = \frac{3}{\cos t}, \quad dx = \frac{3dt}{\cos^2 t}.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx = \int \frac{9tg^2 t \cdot \cos t}{3} \cdot \frac{3dt}{\cos^2 t} =$$

$$= 9\int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos^4 t} = 9\int \frac{\sin^2 t d\sin t}{(1-\sin^2 t)^2} =$$

$$=\frac{9}{4}\int\left(\frac{1}{(1-\sin t)^2}-\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{(1+\sin t)^2}-\frac{1}{1+\sin t}\right)d\sin t=$$

$$=\frac{9}{4(1-\sin t)}-\frac{9}{4(1+\sin t)}+\frac{9}{4}\ln\left|\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right|+C=$$

$$=\frac{9\sin t}{2\cos^2 t}+\frac{9}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos t}-tgt\right|+C=$$

$$=x\sqrt{x^2+9}+\frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-x}{3}\right|+C.$$

Ответ: $x\sqrt{x^2+9}+\frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-x}{3}\right|+C.$

1.2. Определенный интеграл1

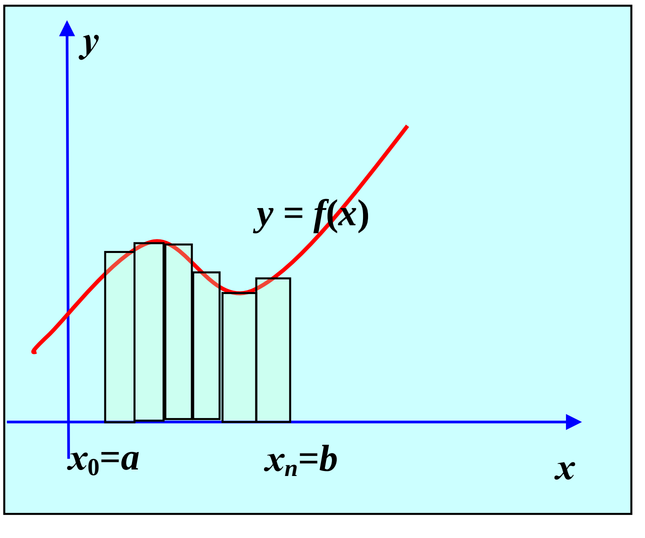
1.2.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, его свойства. Теорема о среднем для определенного интеграла

Для решения многих задач из различных областей науки и техники требуется применение **определенного интеграла**. К ним относятся вычисление площадей, длин дуг, объемов, работы, скорости, пути, моментов инерции и т.д. Определим это понятие.

Рассмотрим отрезок $[a, b]$ оси Оx и определим понятие **разбиения** этого отрезка как множества точек x_i : $a=x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_n=b$. При этом точки x_i называются **точками разбиения**, отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ – **отрезками разбиения** (их длины обозначаются Δx_i), а число

$$|\tau| = \max(\Delta x_1, \Delta x_2,\ldots, \Delta x_n)$$

называется **мелкостью разбиения**.



Пусть на $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$. Выберем на каждом отрезке разбиения по точке ξ_i и составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

называемую **интегральной суммой** функции $f(x)$. Если $f(x) > 0$, такая сумма равна сумме площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$.
Если для любого разбиения отрезка $[a, b]$ существует один и тот же конечный предел интегральных сумм при $n \to \infty$ и $|\tau| \to 0$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ |\tau|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I,$$

то функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на отрезке $[a, b]$, а число I называется **определенным интегралом** $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.
Кроме того, определение определенного интеграла дополняется следующими утверждениями:

$$1)\ \int_a^a f(x)dx = 0, \qquad 2)\ \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем.
Доказательство.
Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Зафиксируем какое-либо ε, например, $\varepsilon = 1$. По определению интегрируемой функции существует такое $\delta > 0$, что для любой интегральной суммы σ_τ, соответствующей разбиению, для которого $|\tau| < \delta$, верно неравенство $|\sigma_\tau - I| < 1$, откуда $I - 1 < \sigma_\tau < I + 1$, то есть множество интегральных сумм функции $f(x)$ ограничено.
Если предположить при этом, что $f(x)$ не ограничена на [a,b], то она не ограничена по крайней мере на одном из отрезков разбиения. Тогда произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ на этом отрезке может принимать сколь угодно большие значения, то есть интегральная сумма оказывается неограниченной, что противоречит условию интегрируемости $f(x)$.

Замечание. Условие ограниченности функции является необходимым, но не достаточным условием интегрируемости. В качестве примера рассмотрим функцию Дирихле: $f(x) = 1$, если x рационально, и $f(x) = 0$, если x иррационально. Для нее на любом отрезке $[a,b]$ и при любом разбиении на каждом отрезке Δx_i найдутся как рациональные, так и иррациональные значения x. Выбрав в качестве ξ_i рациональные числа, для которых $f(\xi_i)= 1$, получим, что

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = b - a.$$

Если же считать, что ξ_i – иррациональные числа, то

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

Следовательно, предел интегральных сумм не существует, и функция Дирихле не интегрируема ни на каком отрезке.

Сформулируем понятия верхней и нижней интегральных сумм. Пусть m_i – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке Δx_i , а M_i – ее наибольшее значение на этом отрезке.

Сумма

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

называется **нижней интегральной суммой** функции $f(x)$ на $[a,b]$, а

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad -$$

верхней интегральной суммой.

Свойства интегральных сумм

1. Так как на любом отрезке разбиения $m_i \leq M_i$, то $s_i \leq S_i$.

2. Если m – наименьшее значение $f(x)$ на $[a,b]$, а M – ее наибольшее значение на $[a,b]$, то

$$m(b-a) \leq s_n \leq S_n \leq M(b-a).$$

3. При добавлении к выбранному разбиению новых точек s_n может только возрастать, а S_n – только уменьшаться.

Доказательство.

Пусть отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ разбит на p отрезков. Обозначим нижнюю и верхнюю интегральные суммы на этих отрезках как s_p и S_p. Но для отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ наименьшим значением функции является $m_к$, а наибольшим – $M_к$.

Следовательно, по свойству 2 $s_p \geq m_k\ \Delta x_k$ – соответствующему слагаемому общей интегральной суммы s, а $S_k \leq M_k\ \Delta x_k$ – слагаемому верхней интегральной суммы. Таким образом, каждое слагаемое s может только увеличиваться при добавлении новых точек, а каждое слагаемое S – только уменьшаться, что и доказывает сформулированное утверждение.

4. Существуют

$$\lim_{n\to\infty} s = \overline{s} \quad и \quad \lim_{n\to\infty} S = \overline{S}.$$

Доказательство.
Из свойств 2 и 3 следует, что s ограничена ($s \leq M(b-a)$) и монотонно возрастает. Следовательно, она имеет предел. Подобное же рассуждение справедливо для S.

5. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\overline{s} = \overline{S}$.
Доказательство.
Назовем **колебанием** функции $f(x)$ на отрезке $\Delta x_к$ разность $\omega_k = M_k - m_k$. Тогда в силу непрерывности $f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \omega_k < \varepsilon \quad при \quad |\tau| < \delta.$$

Следовательно, $S - s < \varepsilon(b-a)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}(S-s) = 0$, что и требовалось доказать.
Замечание. Так как s и S можно считать частными случаями интегральных сумм функции $f(x)$, то

$$\overline{s} = \overline{S} = I = \int_a^b f(x)dx.$$

6. Для любых двух разбиений данного отрезка τ_1 и τ_2 $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$.
Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть разбиение, включающее все точки разбиений τ_1 и τ_2, и воспользоваться свойствами 1 и 3.

Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство.

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\tau|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$=$$

$$= A \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\tau|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx.$$

2. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$

Доказательство.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\tau|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} (f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\tau|\to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \right) = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

3.Если на отрезке [a,b] (a<b)

$$f(x) \le g(x), \quad mo \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство.

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \; g(x) - f(x) \; dx =$$

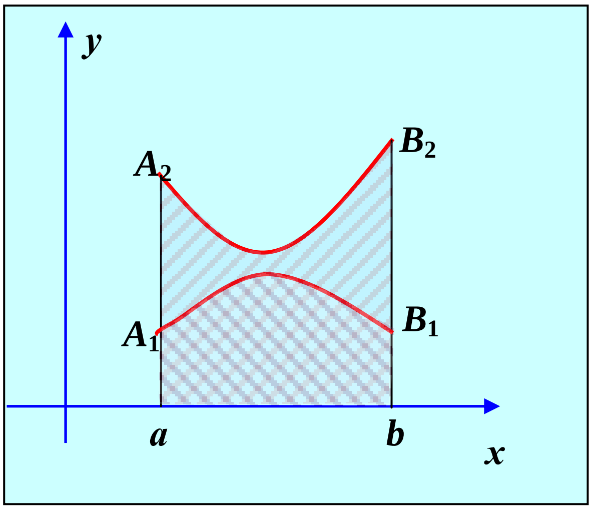
$$= \lim_{\substack{|\tau|\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \; g(\xi_i) - f(\xi_i) \; \Delta x_i \ge 0,$$

так как

$$g(\xi_i) - f(\xi_i) \ge 0, \quad \Delta x_i \ge 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$



Геометрическая интерпретация: площадь криволинейной трапеции aA_1B_1b не больше площади aA_2B_2b.

4. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доказательство.

Так как

$$m \le f(x) \le M,$$

по свойству 3

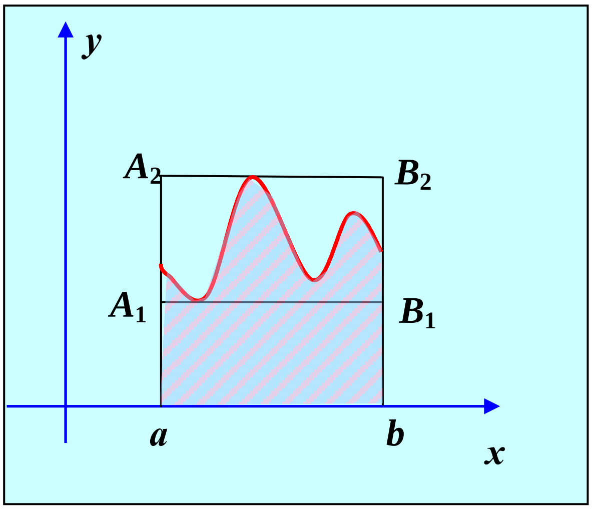
$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx.$$

Но

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx = M(b-a),$$

следовательно,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$



Геометрическая интерпретация: площадь криволинейной трапеции содержится между площадями прямоугольников aA_1B_1b и aA_2B_2b.

5 (Теорема о среднем). Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a*,*b*], то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Доказательство.
Пусть $a < b$, m и M – наименьшее и наибольшее значения функции *f(x)* на [*a*,*b*]. Тогда по свойству 4

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Пусть

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu, \quad m \le \mu \le M.$$

Так как *f(x)* непрерывна на [*a*,*b*], она принимает на нем все промежуточные значения между m и M, то есть существует $\xi (a \le \xi \le b)$ такое, что $f(\xi) = \mu$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi),$$

что и требовалось доказать.

6. Для любых трех чисел *a*,*b*,*c* справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если все эти интегралы существуют.
Доказательство.

Пусть $a < c < b$. Составим интегральную сумму так, чтобы точка c была точкой деления. Тогда

$$\sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $|\tau| \to 0,$ получим доказательство свойства 6.

Если $a < b < c,$ то по только что доказанному

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$$

Но

$$\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx,$$

поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Аналогично доказывается это свойство и при любом другом расположении точек a, b и c.

Примеры решения задач

Задача 1.

Найти верхнюю интегральную сумму S для интеграла

$$\int_2^3 x^2 dx,$$

разбивая промежуток интегрирования на n равных частей.

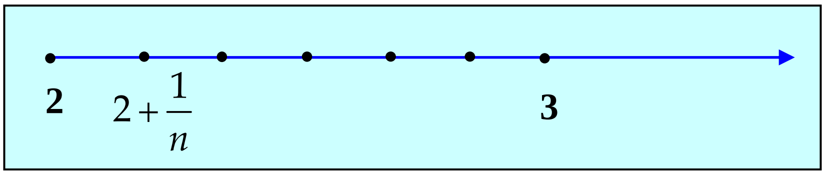
Указание

Подынтегральная функция монотонно возрастает, поэтому наибольшее значение на каждом интервале разбиения она принимает на правой границе интервала.

При вычислении интегральной суммы воспользуйтесь формулой

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение



$$S=\frac{1}{n}\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)^2+\left(2+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(2+\frac{n}{n}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}+4+\frac{4\cdot 2}{n}+\frac{4}{n^2}+\ldots+4+\frac{4n}{n}+\frac{n^2}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(4n+\frac{4}{n}(1+2+\ldots+n)+\frac{1}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+n^2)\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(4n+\frac{4}{n}\cdot\frac{1+n}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(4n+2n+2+\frac{2n^2+3n+2}{6n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(6n+2+\frac{n}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}\right)=\frac{19}{3}+\frac{5}{2n}+\frac{1}{3n^2}.$$

Ответ: $\frac{19}{3}+\frac{5n}{2}+\frac{1}{3n^2}$.

Задача 2.
Найти нижнюю интегральную сумму s для интеграла

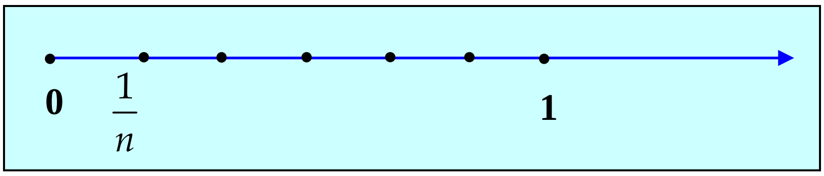
$$\int_0^1 \sqrt{x}dx,$$

разбивая промежуток интегрирования на n равных частей.

Указание

Подынтегральная функция монотонно возрастает, поэтому наименьшее значение на каждом интервале разбиения она принимает на левой границе интервала.

Решение



$$S=\frac{1}{n}\left(\sqrt{0}+\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Ответ: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

Задача 3.
Вычислить интеграл

$$\int_0^1 2^x\,dx$$

как предел интегральной суммы.

Указание

Разбейте промежуток интегрирования на n равных частей и воспользуйтесь формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},$$

где b_1 – первый член прогрессии, а q – ее знаменатель.

Решение

Подынтегральная функция непрерывна на отрезке [0;1], следовательно, она интегрируема на нем. Поэтому мы можем вычислять интеграл как предел любой интегральной суммы, например, верхней интегральной суммы S. При этом значение функции на каждом отрезке разбиения вычисляется на правой границе отрезка, поскольку функция 2^x монотонно возрастает.
Заметим, что интегральная сумма представляет собой сумму геометрической прогрессии с

$$b_1 = 2^{\frac{1}{n}} \quad и \quad q = 2^{\frac{1}{n}}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \ldots + 2^{\frac{n}{n}}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}\left(\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1\right)}{2^{\frac{1}{n}} - 1} =$$

$$= 2^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{2^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

$$\int_0^1 2^x\,dx = \lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{2^{\frac{1}{n}} - 1} \overset{x=\frac{1}{n}}{=} 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{2^x - 1} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Ответ: $\frac{1}{\ln 2}$.

Задача 4.

Вычислить интеграл

$$\int_0^1 x^3 dx$$

как предел интегральной суммы, разбивая промежуток интегрирования так, чтобы точки деления образовали геометрическую прогрессию.

Указание

Докажите, что предел интегральной суммы для интеграла

$$\int_a^b x^k dx$$

равен

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Решение

Пусть

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad x_i = x_0 q^i,$$

$$\Delta x_i = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Тогда

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = a^{k+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i(k+1)}{n}} =$$

$$= b^{k+1} - a^{k+1} \; \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - 1},$$

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Следовательно, при $a = 0$, $b = 1$, $k = 3$ получаем, что

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача 5.

Оценить интеграл

$$I = \int_{1,5}^{3,5} \frac{x^2 dx}{x-1},$$

используя теорему о среднем.

Указание

Найдите наибольшее и наименьшее значение подынтегральной функции на отрезке интегрирования и воспользуйтесь формулой

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

$$\textit{где} \quad m = \min_{[a,b]} f(x), \quad M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Решение

Найдем наибольшее и наименьшее значение подынтегральной функции на отрезке интегрирования:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad -$$

критическая точка, принадлежащая отрезку интегрирования.

$$f(1,5) = 4,5; \quad f(2) = 4; \quad f(3,5) = 4,9 \Rightarrow$$

$$m = \min_{[1,5;3,5]} f(x) = 4, \quad M = \max_{[1,5;3,5]} f(x) = 4,9 \Rightarrow$$

$$4(3,5-1,5) < I < 4,9(3,5-1,5) \Rightarrow 8 < I < 9,8.$$

Ответ: $8 < I < 9,8.$

1.2.2. Интегрируемость непрерывных, кусочно-непрерывных и монотонных ограниченных функций. Производная интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 1. Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.
Доказательство.
Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она, во-первых, ограничена на нем, а во-вторых, равномерно непрерывна, то есть $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что

$$\forall x, x' \in [a,b], \quad |x - x'| < \delta, \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Тогда для разбиения, в котором $|\tau| < \delta,$ колебание $\omega_i < \varepsilon,$ следовательно,

$$0 < S - s < \varepsilon(b-a),$$

и по свойству 5 верхних и нижних интегральных сумм получим, что существует $\int_a^b f(x)dx.$

Теорема 2. Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на нем.

Доказательство.
Пусть *f(x)* возрастает на [*a*,*b*]. Тогда

$$\forall x \in [a,b] \quad f(a) \le f(x) \le f(b),$$

то есть *f(x)* ограничена на [*a*,*b*]. Кроме того, для любого интервала [x_{i-1}, x_i]

$$m_i = f(x_{i-1}), \quad M_i = f(x_i).$$

Следовательно,

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \le$$

$$\le (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) \,|\tau| =$$

$$= (f(b) - f(a)) \,|\tau|.$$

Поэтому

$$\lim_{|\tau|\to 0}(S - s) = 0,$$

следовательно, *f(x)* интегрируема на [*a*,*b*].

Замечание. В теореме 2 не требовалась непрерывность функции. Монотонная функция может быть и разрывной, при этом она является интегрируемой по теореме 2.

Теорема 3. Если *f(x)* – непрерывная функция и

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \text{то} \quad \Phi'(x) = f(x).$$

(Производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела).
Доказательство.
Пусть Δx – приращение аргумента x. Тогда по свойству 6 определенного интеграла

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

По теореме о среднем (свойство 5)

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x, \quad \textit{где} \quad x < \xi < x+\Delta x.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Следовательно,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi).$$

Но при $\Delta x \to 0 \quad \xi \to x,$ и вследствие непрерывности функции *f(x)*

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Таким образом,

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 3 следует, что всякая непрерывная функция имеет первообразную, так как по теореме 1 она интегрируема, а по теореме 3 ее первообразной является

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Теорема 4. Если *F(x)* является первообразной непрерывной функции *f(x)*, то справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),}$$

называемая **формулой Ньютона – Лейбница**.

Доказательство.

По теореме 3 $\int_a^x f(t)dt$ – первообразная функции *f(x)*, поэтому *F(x)* и $\int_a^x f(t)dt$ отличаются на постоянное слагаемое *C*. Следовательно,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Пусть *x*=*a*, тогда отсюда получим

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C,$$

то есть *F(a)* + *C* = 0, откуда *C* = - *F(a)*. Тогда

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Принимая в этом равенстве $x=b$, получим формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Замечание. Обычно вводится обозначение

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

и формула Ньютона-Лейбница записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Примеры.

1. $$\int_1^e \frac{x-1}{x}dx = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = \; x - \ln|x|\,\Big|_1^e =$$

$$= (e - \ln e) - (1 - \ln 1) = e - 1 - 1 + 0 = e - 2.$$

2. $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Примеры решения задач

Задача 1.

Вычислить интеграл

$$\int_9^{16} \frac{1+3x}{\sqrt{x}}dx.$$

Указание

Найдите первообразную подынтегральной функции, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение

$$\int_9^{16} \frac{1+3x}{\sqrt{x}} dx = \int_9^{16} \left(x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx = 2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} \Big|_9^{16} =$$

$$= 2 \cdot 16^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 16^{\frac{3}{2}} - \left(2 \cdot 9^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 9^{\frac{3}{2}} \right) = 8 + 128 - 6 - 54 = 76.$$

Ответ: 76.

Задача 2.
Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx.$$

Указание

Найдите первообразную подынтегральной функции, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(1 - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= x + 2ctgx \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$

Задача 3.
Вычислить интеграл

$$\int_1^5 \frac{3x+7}{x^2 + 5x + 6} dx.$$

Указание

Найдите первообразную подынтегральной функции, разложив ее в сумму простейших дробей, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение

$$\int_1^5 \frac{3x+7}{x^2+5x+6}dx = \int_1^5 \left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}\right)dx =$$

$$= \ln|x+2|+2\ln|x+3| \Big|_1^5 = \ln\left|(x+2)(x+3)^2\right|\Big|_1^5 =$$

$$= \ln(7\cdot 64) - \ln(3\cdot 16) = \ln\frac{7\cdot 64}{3\cdot 16} = \ln\frac{28}{3}.$$

Ответ: $\ln\frac{28}{3}$.

Задача 4.
Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx.$$

Указание

Найдите первообразную подынтегральной функции, преобразовав произведение тригонометрических функций в сумму, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x - \cos 9x \;\; dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{18}\sin 9x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{18}\sin\frac{9\pi}{2} - 0 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{9}$.

Задача 5.
Вычислить интеграл

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx.$$

Указание

Найдите первообразную подынтегральной функции, представив числитель дроби как разность квадратов, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx = \int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}dx =$$

$$= \int_4^9 (\sqrt{x}-1)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\Big|_4^9 = \frac{2}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9 - \left(\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - 4\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 27 - 9 - \frac{2}{3}\cdot 8 + 4 = \frac{23}{3}.$$

Ответ: $\frac{23}{3}$.

1.2.3. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Геометрические приложения определенного интеграла.

Теорема 1. Если:

1) функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$,

2) функция $\varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$,

3) функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$,

то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

Доказательство.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Тогда, используя формулу Ньютона – Лейбница, получим:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

откуда следует справедливость формулы (1).

Замечание. В отличие от неопределенного интеграла, в определенном интеграле нет необходимости возвращаться к прежней переменной интегрирования, так как результатом вычисления будет число, не зависящее от выбора переменной.

Пример.

Вычислить интеграл

$$\int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Сделаем замену:

$$t = \sqrt{x+1},$$

откуда

$$x = t^2 - 1, \quad x' = 2t.$$

При этом

$$\alpha = \sqrt{3+1} = 2, \quad \beta = \sqrt{8+1} = 3.$$

Тогда

$$\int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx = \int_2^3 \frac{(t^2-4)2t}{t}dt =$$

$$== 2\int_2^3 (t^2-4)dt = \left(\frac{2}{3}t^3 - 8t\right)\Bigg|_2^3 = -6 + \frac{32}{3} = \frac{14}{3}.$$

Теорема 2. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \quad (2)$$

(Формула (2) называется **формулой интегрирования по частям** для определенного интеграла).

Доказательство.

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b (uv' + u'v)dx = \int_a^b udv + \int_a^b vdu..$$

Все интегралы в этом равенстве существуют, так как подынтегральные функции непрерывны. При этом

$$\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b,$$

поэтому

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b u dv + \int_a^b v du,$$

откуда следует (2).

Примеры.

1) Вычислить интеграл

$$\int_1^2 xe^x dx.$$

Пусть $u = x$, $dv = e^x dx$. Тогда $du = dx$, $v = e^x$. Применим формулу (2):

$$\int_1^2 xde^x = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

$$2) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d \arcsin x =$$

$$= \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \quad .$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi + \sqrt{3} - 2}{2}$$

(При интегрировании принималось $u = x$, $v = \arcsin x$).

3) Вычислить

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

Пусть $u = e^x$, $dv = \sin x dx$. Тогда $du = e^x dx$, $v = -\cos x$. Следовательно,

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = -e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \cdot e^x dx =$$

$$= e^{\pi} + 1 + \int_0^{\pi} \cos x \cdot e^x dx.$$

Применим к интегралу в правой части полученного равенства еще раз формулу интегрирования по частям, положив $u = e^x$, $dv = \cos x dx$:

$$\int_0^\pi e^x \sin x dx = e^\pi + 1 + e^x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx =$$

$$= e^\pi + 1 + 0 - 0 - \int_0^\pi e^x \sin x dx = e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x \sin x dx.$$

Поскольку при этом в правой части равенства стоит такой же интеграл, как в левой, его значение можно найти из уравнения:

$$2\int_0^\pi e^x \sin x dx = e^\pi + 1,$$

то есть

$$\int_0^\pi e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

Вспомним, каким образом вводилось понятие определенного интеграла. С геометрической точки зрения интегральная сумма представляет собой (при $f(x) \geq 0$) сумму площадей прямоугольников с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Переходя к пределу при $|\tau| \to 0$, получаем, что $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x) \geq 0$ представляет собой площадь так называемой криволинейной трапеции aA_1B_1b, то есть фигуры, ограниченной частью графика функции $f(x)$ от $x = a$ до $x = b$ и отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ (рис. 1):

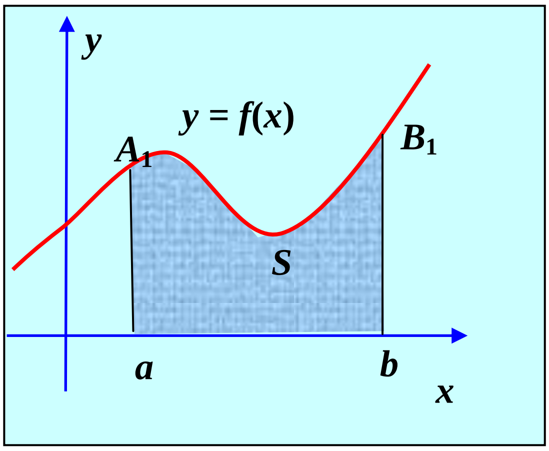


Рис. 1

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

Если требуется найти площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций: $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (рис. 2), то ее можно рассматривать как разность площадей двух криволинейных трапеций: верхней границей первой из них служит график функции $f_2(x)$, а второй – $f_1(x)$.

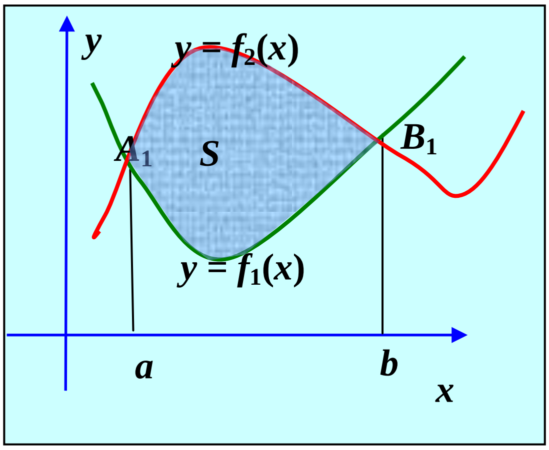


Рис. 2

Таким образом,

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (4)$$

Замечание 1. Формула (4) справедлива, если графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не пересекаются при $a < x < b$.

Замечание 2. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут при этом принимать на интервале $[a,b]$ значения любого знака.

Пример.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x - 5$ и $y = x - 5$.

Найдем абсциссы точек пересечения указанных графиков, то есть корни уравнения $x^2 - 3x - 5 = x - 5$. $x^2 - 4x = 0$, $x_1 = a = 0$, $x_2 = b = 4$. Таким образом, найдены пределы интегрирования. Так как на интервале [0,4] прямая $y = x - 5$ проходит выше параболы $y = x^2 - 3x - 5$, формула (4) примет вид:

$$S = \int_0^4 (x - 5 - (x^2 - 3x - 5))dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx =$$

$$= 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

Площадь в полярных координатах

Введем на плоскости криволинейную систему координат, называемую **полярной**. Она состоит из точки O (полюса) и выходящего из него луча (полярной оси).

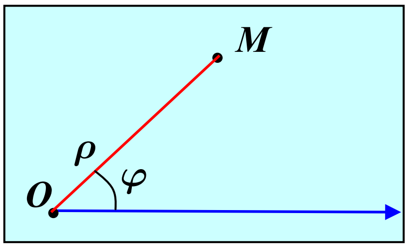


Рис.3

Координатами точки M в этой системе (рис. 3) будут длина отрезка MO – полярный радиус ρ и угол φ между MO и полярной осью: $M(\rho,\varphi)$. Отметим, что для всех точек плоскости, кроме полюса, $\rho > 0$, а полярный угол φ будем считать положительным при измерении его в направлении против часовой стрелки и отрицательным – при измерении в противоположном направлении.

Замечание. Если ограничить значения φ интервалом $[0,\pi]$ или $[-\pi, \pi]$, то каждой точке плоскости соответствует единственная пара координат (ρ,φ). В других случаях можно считать, что φ может принимать любые значения, то есть полярный угол определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π.

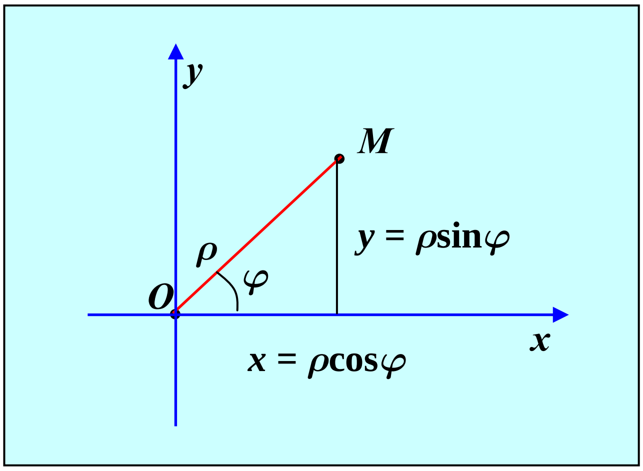


Рис. 4

Связь между полярными и декартовыми координатами точки M можно задать, если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, а положительную полуось Ox – с полярной осью (рис. 4). Тогда $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Отсюда

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad tg\varphi=\frac{y}{x}.$$

Выясним, как с помощью определенного интеграла вычислить площадь фигуры, границы которой заданы в полярных координатах.

а) *Площадь криволинейного сектора*

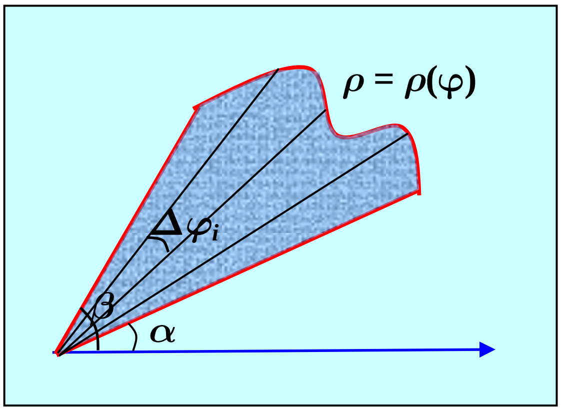


Рис.5

Найдем площадь фигуры, ограниченной частью графика функции $\rho=\rho(\varphi)$ и отрезками лучей $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$. Для этого разобьем ее на n частей лучами $\varphi=\varphi_i$ и найдем сумму площадей круговых секторов, радиусами которых служат

$$\rho_i=\rho(\phi_i),\quad где\quad \varphi_{i-1}<\phi_i<\varphi_i.$$

Как известно, площадь сектора вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}r^2\alpha,$

где r – радиус сектора, а α – его центральный угол. Следовательно, для суммы площадей рассматриваемых секторов можно составить интегральную сумму

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\Delta\varphi_i,\quad где\quad \Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}.$$

В пределе при $\max\Delta\varphi_i\to 0$ получим, что площадь криволинейного сектора

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi.$$

б) *Площадь замкнутой области*

Если рассмотреть замкнутую область на плоскости, ограниченную кривыми, уравнения которых заданы в полярных координатах в виде

$$\rho=\rho_1(\varphi)\quad и\quad \rho=\rho_2(\varphi)\quad \rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)\ ,$$

а полярный угол φ принимает для точек внутри области значения в пределах от α до β (рис. 6), то ее площадь можно вычислять как разность площадей криволинейных секторов, ограниченных кривыми

$$\rho = \rho_1(\varphi) \quad и \quad \rho = \rho_2(\varphi),$$

то есть

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}({\rho_2}^2 - \rho_1^2)d\varphi. \quad (5)$$

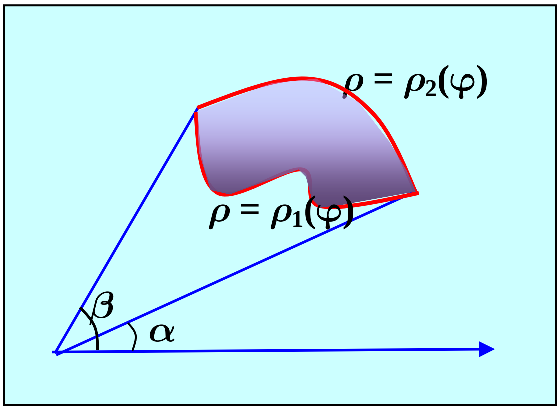


Рис.6

Пример.
Вычислим площадь области, заключенной между дугой окружности $x^2 + y^2 = 1$ и прямой

$$x = \frac{1}{2} \quad при \quad \frac{1}{2} \le x \le 1.$$

В точках пересечения прямой и окружности

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \pm\frac{1}{2},$$

то есть полярный угол φ изменяется внутри области в пределах от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$ (рис.7).

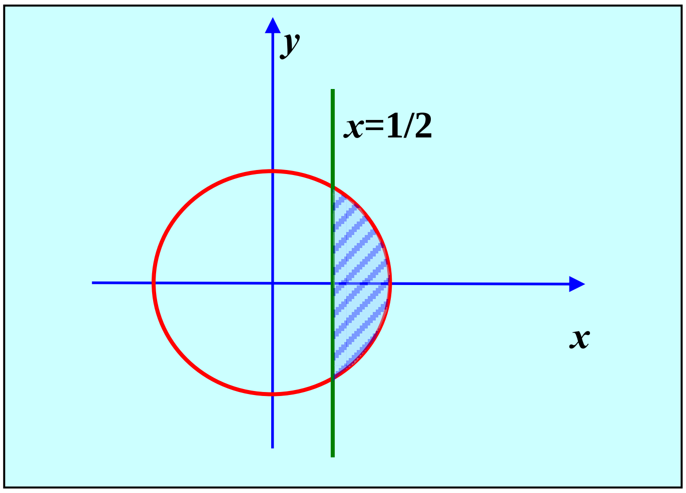


Рис. 7

Уравнение окружности в полярных координатах имеет вид $\rho = 1$, уравнение прямой –

$$\rho\cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \textit{то} \quad \textit{есть} \quad \rho = \frac{1}{2\cos\varphi}.$$

Следовательно, площадь рассматриваемой области можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1 - \frac{1}{4\cos^2\varphi}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}tg\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi - 1}{4}..$$

Длина дуги кривой

а) *Длина дуги в декартовых координатах*

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$ вместе со своей производной. Выберем разбиение τ отрезка $[a,b]$ и будем считать длиной дуги кривой, являющейся графиком $f(x)$, от $x=a$ до $x=b$ предел при $|\tau|\to 0$ длины ломаной, проведенной через точки графика с абсциссами x_0 , x_1 ,..., x_n (точками разбиения τ) при стремлении длины ее наибольшего звена к нулю:

$$l = \lim_{\max\Delta l_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i.$$

Убедимся, что при поставленных условиях этот предел существует. Пусть

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Тогда

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

(рис. 8).

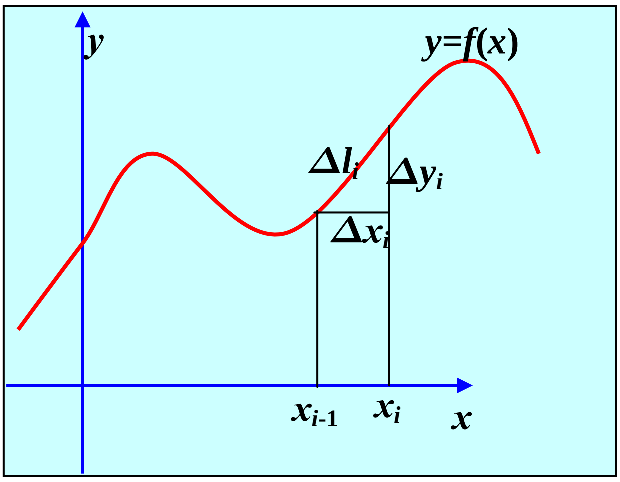


Рис. 8

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad где \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Поэтому

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i,$$

а длина ломаной

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f(\xi_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Из непрерывности $f(x)$ и $f'(x)$ следует и непрерывность функции

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

следовательно, существует и предел интегральной суммы, являющейся длиной ломаной, который равен

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Таким образом, получена формула для вычисления длины дуги:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \quad (6)$$

Пример.

Найти длину дуги кривой

$$y = \ln x \quad от \quad x = \sqrt{3} \quad до \quad x = \sqrt{15}.$$

$$l=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}\sqrt{1+((\ln x)')^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=$$

$$=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Сделаем замену:

$$u=\sqrt{x^2+1},$$

тогда

$$x^2=u^2-1,\quad du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$$

а пределами интегрирования для u будут u=2 (при x_= $\sqrt{3}$) и u = 4 (при x = $\sqrt{15}$). Получим:

$$l=\int_2^4\frac{u^2}{u^2-1}\,du=\frac{1}{2}\int_2^4\left(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2u+\ln\frac{u-1}{u+1}\right)\Bigg|_2^4=2+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}.$$

б) *Длина дуги кривой, заданной в параметрической форме*

Если уравнения кривой заданы в виде

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\quad \text{где}\quad \alpha\le t\le\beta,$$

а $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем

$$\varphi'(t)\neq 0\quad \text{на}\quad \alpha,\beta\ ,$$

то эти уравнения определяют непрерывную функцию y = $f(x)$, имеющую непрерывную производную

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Если

$$a=\varphi(\alpha),\quad b=\varphi(\beta),$$

то

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)dt,$$

или

$$\boxed{l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'(t)^{\,2}+\ \psi'(t)^{\,2}}\,dt.\quad (7)}$$

Замечание. Если пространственная линия задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

то при указанных ранее условиях

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 + \left[\chi'(t)\right]^2}\, dt. \quad (7')}$$

в) *Длина дуги в полярных координатах*

Если уравнение кривой задано в полярных координатах в виде $\rho = f(\varphi)$, то $x = \rho\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$ – параметрические уравнения относительно параметра φ. Тогда для вычисления длины дуги можно использовать формулу (7), вычислив предварительно производные x и y по φ:

$$\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \left[f'(\varphi)\right]^2 + \left[f(\varphi)\right]^2 = \rho'^2 + \rho^2,$$

поэтому

$$\boxed{l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi. \quad (8)}$$

Пример.

Найти длину дуги спирали Архимеда $\rho = \varphi$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$.

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=\int_0^{arctg 2\pi}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{arctg 2\pi}\frac{\cos t dt}{\cos^4 t}=$$

$$=\int_0^{arctg 2\pi}\frac{d\sin t}{(1-\sin t)^2(1+\sin t)^2}=\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}}\frac{du}{(1-u)^2(1+u)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right)du=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|-\frac{1}{1+u}++\frac{1}{1-u}\right)\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\pi^2}}}=$$

$$=\ln\sqrt{2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}}+\pi\sqrt{1+4\pi^2}$$

(были применены замены φ = tg t и u = sin$t$).

Вычисление объемов тел

Пусть имеется некоторое тело, для которого известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной оси Оx, являющаяся функцией от x: $Q = Q(x)$. Определим объем рассматриваемого тела в предположении, что Q – непрерывная функция. Если значение x внутри тела меняется от a до b, то можно разбить тело на слои плоскостями $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, …, $x = x_n = b$. Затем выберем в каждом слое значение $x = \xi_i$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, и рассмотрим сумму объемов цилиндров с площадями оснований $Q(\xi_i)$ и высотами $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Эта сумма будет равна

$$v_n=\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i)\Delta x_i.$$

Получена интегральная сумма для непрерывной функции $Q(x)$ на отрезке $[a,b]$, следовательно, для нее существует предел при $|\tau| \to 0$, который равен определенному интегралу

$$v=\int_a^b Q(x)dx, \qquad (9)$$

называемому **объемом данного тела**.

Замечание. Если требуется определить объем так называемого **тела вращения**, то есть тела, образованного вращением вокруг оси Оx криволинейной трапеции, ограниченной частью графика функции $y = f(x)$ от

$x = a$ до $x = b$ и отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и $y = 0$, то площадь сечения такого тела плоскостью $x = \text{const}$ равна

$$\pi y^2 = \pi(f(x))^2,$$

и формула (9) в этом случае имеет вид:

$$\boxed{v = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (9')}$$

Пример.

Найдем объем эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1.$$

При $x = \text{const}$ сечениями будут круги

$$y^2 + z^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$

с радиусом

$$R = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

и площадью

$$Q(x) = \pi\left(1 - \frac{x^2}{4}\right).$$

Применим формулу (9'), учитывая, что x изменяется от –2 до 2:

$$v = v = \pi\int_{-2}^{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx = \pi\left(x - \frac{1}{12}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{8\pi}{3}.$$

Площадь поверхности тела вращения

Пусть требуется определить площадь поверхности, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox при $a \le x \le b$. Выберем разбиение τ отрезка $[a,b]$ и рассмотрим, как и при определении длины кривой, ломаную, проходящую через точки кривой с абсциссами x_i . Каждый отрезок такой ломаной при вращении опишет усеченный конус, площадь боковой поверхности которого равна

$$\Delta S_i = 2\pi\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\Delta l_i = 2\pi\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad где \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Поэтому

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Следовательно, площадь всей поверхности, описанной ломаной при вращении, равна

$$S_n = \pi \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + f(x_i) \; \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Назовем **площадью поверхности вращения** предел этой суммы при $\max \Delta l_i \to 0$.

Заметим, что эта сумма не является интегральной суммой для функции

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

так как в каждом ее слагаемом фигурирует несколько точек данного отрезка разбиения. Однако можно доказать, что предел такой суммы равен пределу интегральной суммы для

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

откуда получаем формулу для площади поверхности вращения:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (10)$$

Пример.

Вычислим площадь поверхности, полученной вращением части кривой

$$y = \sqrt{x} \quad от \quad x = 0 \quad до \quad x = 1.$$

Используя формулу (10), получим:

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx =$$

$$= \frac{4\pi}{3} (x + \frac{1}{4})^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}.$$

Примеры решения задач

Задача 1.

Вычислить интеграл

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$$

Указание

Сделайте замену

$$t = 1 + \ln x.$$

Решение

$$t = 1 + \ln x \Rightarrow dt = (1 + \ln x)' dx = \frac{dx}{x};$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1,$$

$$x = e^3 \Rightarrow t = 1 + \ln e^3 = 1 + 3\ln e = 1 + 3 = 4.$$

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 = 2(2-1) = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 2.
Вычислить интеграл

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

Указание

Сделайте замену

$$x = \frac{1}{\sin t}.$$

Решение

$$x=\frac{1}{\sin t}\Rightarrow\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}=\frac{\cos t}{\sin t};\quad dx=-\sin^{-2}t\cos tdt=-\frac{\cos tdt}{\sin^2 t};$$

$$t=\arcsin\frac{1}{x}:\quad x=1\Rightarrow t=\arcsin 1=\frac{\pi}{2};$$

$$x=2\Rightarrow t=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

$$\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin t\cdot\left(-\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}\right)=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=$$

$$=-ctgt-t\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-ctg\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+ctg\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 3.
Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi}x^3\cos xdx.$$

Указание

Примените формулу интегрирования по частям.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям:

$$u=x^3,\quad du=3x^2dx;\quad dv=\cos xdx,\quad v=\sin x.$$

Тогда

$$\int_0^{\pi}x^3\cos xdx=x^3\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\cdot 3x^2dx.$$

Вновь применим к полученному интегралу формулу интегрирования по частям:

$$u=x^2,\quad du=2xdx;\quad dv=-\sin xdx,\quad v=\cos x.$$

Получим

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos x dx = x^3 \sin x \Big|_0^{\pi} + 3\int_0^{\pi} -\sin x \cdot x^2 dx =$$

$$= x^3 \sin x \Big|_0^{\pi} + 3\left(x^2 \cos x \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \cos x dx \right) =$$

$$= 0 - 3\pi^2 - 6\left(x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \right) =$$

$$= -3\pi^2 - 6\cos x \Big|_0^{\pi} = 12 - 3\pi^2.$$

Ответ: $12 - 3\pi^2$.

Задача 4.
Вычислить интеграл

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

Указание

Примените формулу интегрирования по частям.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям:

$$u = \ln(x+1), \quad du = \frac{dx}{x+1}; \quad dv = dx, \quad v = x.$$

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = x\ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx =$$

$$(e-1)\ln e - 0 - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx =$$

$$= e - 1 - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= e - 1 - \ \ x - \ln|x+1| \ \Big|_0^{e-1} = e - 1 - (e - 1 - 1) = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 5.
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad и \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

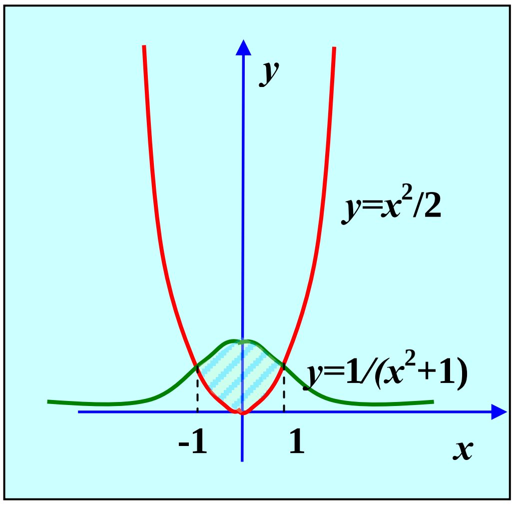
Указание

Постройте графики функций, ограничивающие фигуру, и найдите абсциссы точек их пересечения. Затем вычислите площадь фигуры по формуле

$$S = \int_a^b f_2(x) - f_1(x) \; dx,$$

где $f_1(x)$ – функция, график которой является нижней границей фигуры, а $f_2(x)$ – функция, задающая верхнюю границу.

Решение



$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0,\; x^2 = 1,\; x = \pm 1 \quad -$$

найдены пределы интегрирования.

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = arctgx - \frac{x^3}{6}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

Задача 6.

Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = \sin 2\varphi$.

Указание

Определите возможные значения φ, при которых ρ принимает положительные значения. Затем вычислите площадь в полярных координатах по формуле

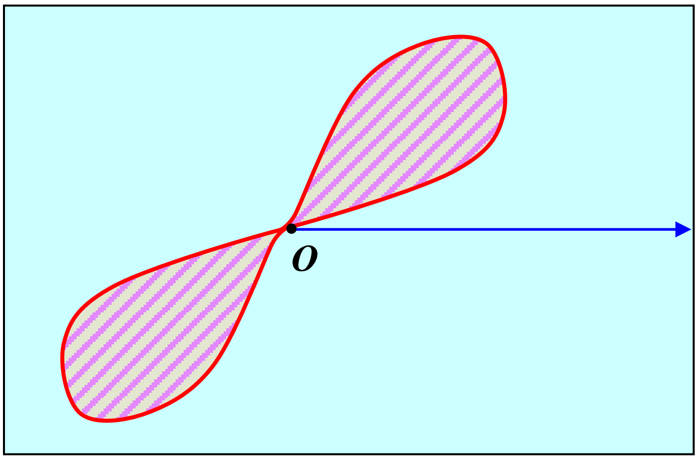
$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Решение

Неравенство $\sin 2\varphi \geq 0$ выполняется в пределах от 0 до 2π для

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad и \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Построим схематический график функции $\rho = \sin 2\varphi$:



Поскольку фигура состоит из двух одинаковых частей, можно вычислять площадь только одной из них:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 7.

Найти длину линии

$$y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}.$$

Указание

Найдите область определения заданной функции, а затем воспользуйтесь формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Решение

Область определения заданной функции является решением системы неравенств

$$\begin{cases} x - x^2 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Найдем вид подынтегральной функции:

$$f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-2x}{2\sqrt{x-x^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1-x)^2}{x(1-x)}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}};$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x};$$

$$\sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$l = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 8.

Найти длину линии

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Указание

Представьте линию в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение

Представим линию в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тогда

$$x'(t) = 3\cos^2 t(-\sin t) = -3\sin t \cos^2 t,$$

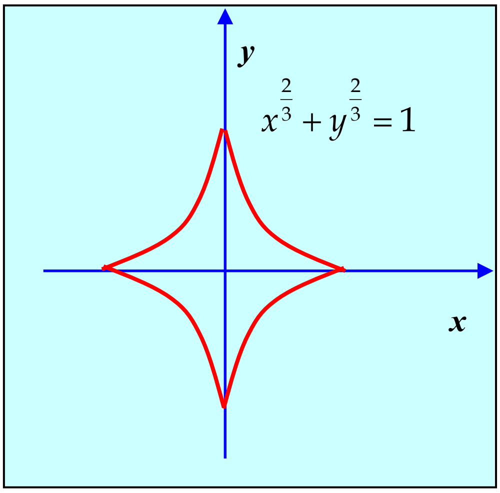
$$y'(t) = 3\sin^2 t \cos t,$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 9\sin^2 t \cos^4 t + 9\sin^4 t \cos^2 t =$$

$$= 9\sin^2 t \cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9\sin^2 t \cos^2 t,$$

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 3|\sin t \cos t|.$$

Обратите внимание на появление модуля: арифметический корень четной степени должен быть неотрицательным, а sin t и cos t в разных четвертях принимают значения разных знаков.



Но, поскольку из формулы, задающей линию в декартовых координатах, видно, что кривая симметрична относительно каждой из координатных осей, можно найти длину ее части, расположенной в первой координатной четверти, где синус и косинус принимают неотрицательные значения, а затем умножить результат на 4:

$$l=4\cdot 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t d\sin t=6\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6.$$

Ответ: 6.

Задача 9.
Найти объем тела, образованного вращением линии

$$y=x^3 \quad (0\le x\le 3)$$

вокруг оси абсцисс.

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$v=\pi\int_a^b y^2dx.$$

Решение

$$V=\pi\int_0^3 x^6dx=\frac{\pi x^7}{7}\Big|_0^3=\frac{2187}{7}\pi.$$

Ответ: $\dfrac{2187}{7}\pi$.

Задача 10.

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой

$$y = \sqrt{x-2} \quad (4 \le x \le 8)$$

вокруг оси абсцисс.

Указание

Примените формулу

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Решение

Определим вид подынтегральной функции:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}; \quad 1 + f'^2(x) = 1 + \frac{1}{4(x-2)} = \frac{4x-7}{4(x-2)};$$

$$f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{x-2} \cdot \frac{\sqrt{4x-7}}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4x-7}.$$

$$S = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int_4^8 (4x-7)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2\pi}{3 \cdot 4}(4x-7)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_4^8 =$$

$$= \frac{\pi}{6}\ \ 125 - 27\ \ = \frac{49\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{49\pi}{3}$.

1.2.4. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Теорема сравнения для интегралов от неотрицательных функций. Абсолютная и условная сходимость. Признак абсолютной сходимости. Несобственные интегралы от неограниченных функций, исследование их сходимости

Расширим понятие определенного интеграла на случай неограниченной области. Такую область можно получить, либо приняв какой-либо из пределов интегрирования равным бесконечности, либо рассматривая график функции с бесконечными разрывами (то есть неограниченной). Рассмотрим отдельно каждый из указанных случаев.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы 1-го рода)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq a$. Тогда интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

имеет смысл при любом $b > a$ и является непрерывной функцией аргумента b. Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

то его называют **несобственным интегралом 1-го рода** от функции $f(x)$ на интервале $[a,+\infty)$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

При этом говорят, что несобственный интеграл существует или **сходится**. Если же не существует конечного предела (1), несобственный интеграл не существует или расходится.

Геометрической интерпретацией несобственного интеграла 1-го рода является площадь неограниченной области, расположенной между графиком функции $y=f(x)$, прямой $x = a$ и осью Ox (рис. 1).

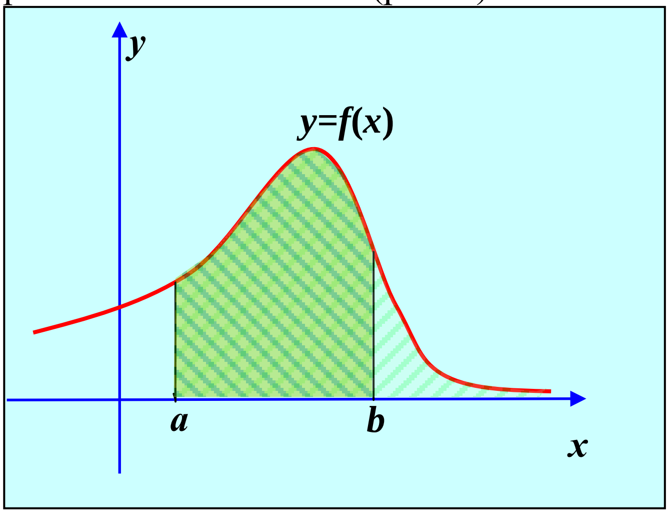


Рис. 1

Замечание. Аналогичным образом можно определить и несобственные интегралы 1-го рода для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

В частности, последний интеграл существует только в том случае, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

Часто достаточно бывает только установить сходимость или расходимость несобственного интеграла и оценить его значение.

Лемма.

Если $f(x) \geq 0$ на интервале $[a,+\infty)$, то для сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

необходимо и достаточно, чтобы множество всех интегралов

$$\int_a^b f(x)dx \quad (b > a)$$

было ограничено сверху, то есть чтобы существовала такая постоянная $c > 0$, чтобы $\forall b \in [a,+\infty)$ выполнялось неравенство

$$\int_a^b f(x)dx < c.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$g(b) = \int_a^b f(x)dx$$

и покажем, что в условиях леммы она монотонно возрастает на $[a,+\infty)$. Действительно, при $a \leq b < b_1$

$$g(b_1) = \int_a^{b_1} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b_1} f(x)dx \geq$$

$$\geq \int_a^b f(x)dx = g(b),$$

так как при

$$f(x) \geq 0 \quad \int_b^{b_1} f(x)dx \geq 0.$$

Следовательно, функция $g(b)$ монотонно возрастает и ограничена сверху, поэтому она имеет конечный предел при $x \to +\infty$, что по определению означает существование интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Теорема 1 (признак сравнения). Пусть

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \quad при \quad x \in [a,+\infty).$$

Тогда:

1) если интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx;$$

2) если интеграл

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$$

расходится, то расходится и интеграл

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx.$$

Доказательство.
Из условия теоремы следует, что

$$\int_a^b\varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \quad \forall b\in[a,+\infty).$$

Поэтому, если интегралы

$$\int_a^b f(x)dx$$

ограничены сверху (по лемме), то сверху ограничены и интегралы

$$\int_a^b\varphi(x)dx,$$

следовательно,

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$$

сходится (по той же лемме). Если же интеграл

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$$

расходится, то, если бы интеграл

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

сходился, то по ранее доказанному

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$$

должен был бы сходиться, что противоречит сделанному предположению. Значит, в этом случае

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

расходится. Теорема полностью доказана.

Следствие.
Пусть

$$f(x) \geq 0, \varphi(x) \geq 0 \quad на \quad [a, \infty),$$
$$\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, \infty),$$
и существует конечный или бесконечный предел
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k.$$
Тогда
а) если интеграл
$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$
сходится и $0 \leq k < +\infty$, то сходится и интеграл
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx;$$
б) если интеграл
$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$
расходится и $0 < k \leq +\infty$, то интеграл
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$
тоже расходится.

В частности, если $k = 1$, то есть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ эквивалентны при $x \to \infty$, то интегралы
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad и \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$
сходятся и расходятся одновременно.

При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с функцией
$$\frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$
для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла легко установить непосредственно. Пусть $\alpha \neq 1$, тогда
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-b}}{1-b} - \frac{x^{1-a}}{1-a} \right) = \begin{cases} +\infty(\alpha < 1) \\ \dfrac{x^{1-a}}{a-1}(\alpha > 1) \end{cases}.$$
При $\alpha = 1$

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\Big|_a^b\right)=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln a)=\infty.$$

Следовательно,

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример.

Исследуем на сходимость

$$\int_1^{\infty}\frac{2x-7}{x^3+x^2+5x+12}dx.$$

При $x\to\infty$ подынтегральная функция эквивалентна $\frac{2}{x^2}$.. Таким образом, α = 2 > 1, и данный интеграл сходится.

Абсолютная сходимость несобственных интегралов 1-го рода

Несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

называют **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx.$$

Функция *f(x)* называется при этом **абсолютно интегрируемой** на $[a,+\infty)$.

Признак абсолютной сходимости несобственного интеграла (критерий Коши) – без доказательства.

Для того чтобы

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое η, что при $\eta' > \eta$, $\eta'' > \eta$

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''}|f(x)|dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема 2. Если интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

абсолютно сходится, то он сходится и в обычном смысле.
Доказательство.
Согласно критерию Коши

$$\left|\int_a^{\eta''} f(x)dx - \int_a^{\eta'} f(x)dx\right| = \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| \le \left|\int_{\eta'}^{\eta''} |\, f(x)\,|\, dx\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, существует конечный предел

$$\int_a^{\eta} f(x)dx \quad при \quad \eta \to b,$$

то есть рассматриваемый интеграл сходится.

Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами (несобственные интегралы 2-го рода)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \le x < b$ и имеет разрыв при $x = b$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (2)$$

и называется **несобственным интегралом 2-го рода**. Если предел, стоящий справа, существует и конечен, интеграл называется **сходящимся**, в противном случае – **расходящимся**.
Аналогичным образом определяются несобственные интегралы от функции, имеющей разрыв при $x = a$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

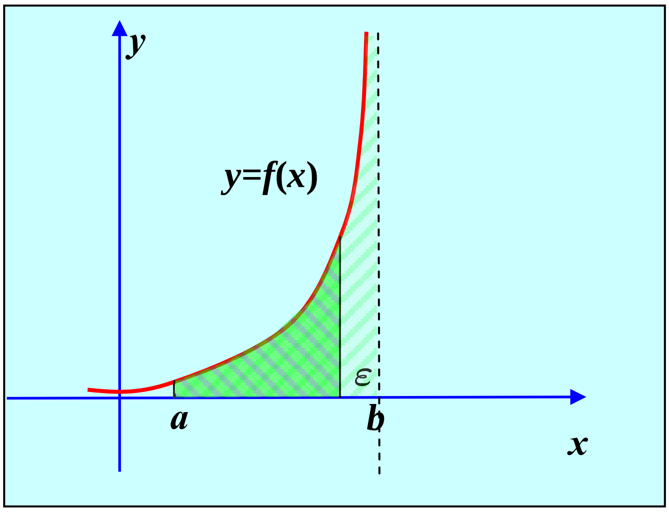


Рис. 2

и от функции, разрывной в точке c ($a<c<b$):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если существуют оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

Для несобственных интегралов 2-го рода справедливы те же утверждения, что и для несобственных интегралов 1-го рода:

Теорема 3(признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \le x < b$ и имеют разрыв при $x = b$. Пусть, кроме того,

$$0 \le \varphi(x) \le f(x) \quad при \quad x \in [a,b).$$

Тогда:

1) если интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)dx;$$

2) если интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)dx$$

расходится, то расходится и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 4. Если $f(x)$ – знакопеременная функция, непрерывная на $[a,b)$ и имеющая разрыв при $x=b$, и если

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Замечание 1. Эти теоремы доказываются так же, как теоремы 1 и 2.
Замечание 2. При выполнении условий теоремы 4 несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

называется **абсолютно сходящимся**, а функция $f(x)$ – **абсолютно интегрируемой**.

Следствие из теоремы 3.
Если

$$f(x) \le \frac{1}{(b-x)^{\alpha}} \quad при \quad x \to b,$$

то при $\alpha < 1$ $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а при $\alpha \geq 1$ расходится.

Доказательство.

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\alpha}} dx = \int_a^b (b-x)^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha} dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \alpha < 1; \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\ln(b-a) - \ln \varepsilon) = \infty, \alpha = 1; \\ \dfrac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} - \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha-1}} = \infty, \alpha > 1. \end{cases}$$

Таким образом, интеграл

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\alpha}} dx$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Примеры решения задач

Задача 1.
Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x+3)^4} dx$$

или установить его расходимость.

Указание

Вычислите определенный интеграл

$$\int_0^B \frac{x}{(x+3)^4}dx$$

и найдите его предел при $B \to \infty$.

Решение

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x+3)^4}dx = \lim_{B\to\infty}\int_0^B \frac{x}{(x+3)^4}dx = \lim_{B\to\infty}\int_0^B \frac{(x+3)-3}{(x+3)^4}dx =$$

$$= \lim_{B\to\infty}\int_0^B \left(\frac{1}{(x+3)^3} - \frac{3}{(x+3)^4}\right)dx = \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{2(x+3)^2} + \frac{1}{(x+3)^3}\right)\Bigg|_0^B =$$

$$= \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{2(B+3)^2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{(B+3)^3} - \frac{1}{27}\right) = \frac{1}{18} - \frac{1}{27} = \frac{1}{54}.$$

Ответ: $\frac{1}{54}$.

Задача 2.

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+13}dx$$

или установить его расходимость.

Указание

Представьте данный интеграл в виде суммы двух несобственных интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+13}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4x+13}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+13}dx$$

и вычислите каждый из них по отдельности.

Решение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+13}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4x+13}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+13}dx;$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4x+13}dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 \frac{1}{x^2+4x+13}dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 \frac{1}{(x+2)^2+9}d(x+2) = \frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}\left(arctg\,\frac{x+2}{3}\Bigg|_A^0\right) =$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}\left(arctg\frac{2}{3}-arctg\frac{A+2}{3}\right)=\frac{1}{3}arctg\frac{2}{3}+\frac{\pi}{6};$$

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{3}\lim_{B\to\infty}\left(arctg\frac{x+2}{3}\Bigg|_0^B\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}arctg\frac{2}{3};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+13}dx=\frac{1}{3}arctg\frac{2}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}arctg\frac{2}{3}=\frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Задача 3.
Указать, при каких значениях k сходится интеграл

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^k x}.$$

Указание

Сделайте замену $t = \ln x$ и определите порядок малости подынтегральной функции относительно функции $\frac{1}{t^a}$, несобственный интеграл 1-го рода от которой сходится при $a > 1$ и расходится при $a \le 1$.

Решение

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^k x}=\int_e^{\infty}\frac{1}{\ln^k x}d\ln x\overset{t=\ln x}{=}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^k}dt \quad -$$

сходится при $k > 1$.
Ответ: $k > 1$.

Задача 4.
Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1\frac{1}{1-x^2}dx$$

или установить его расходимость.

Указание

Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x = 1$. Рассмотрите определенный интеграл

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{1-x^2}dx$$

и перейдите к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Решение

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{2}{\varepsilon}-1\right| =$$

$$= \ln\infty = \infty \quad -$$

интеграл расходится.

Ответ: интеграл расходится.

Задача 5.

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$$

или установить его расходимость.

Указание

Представьте данный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx,$$

первый из которых является несобственным интегралом 2-го рода от функции с бесконечным разрывом при $x = 0$, а второй – несобственным интегралом 1-го рода.

Решение

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx \overset{t=\sqrt{x}}{=} 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{(t^2+1)} =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(arctg\, t\Big|_\varepsilon^1\right) = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\ arctg 1 - arctg\varepsilon\ = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = 2\lim_{B\to\infty}\left(arctg\, t\Big|_1^B\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ответ: π.

2.1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

2.1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности задачи Коши

Уравнения, в которые неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называются дифференциальными уравнениями. Подобными уравнениями описываются многие физические явления и процессы.

Примеры.

1) $\dfrac{dx}{dt} = -kx$ –

уравнение радиоактивного распада (k – постоянная распада, x – количество неразложившегося вещества в момент времени t, скорость распада $\dfrac{dx}{dt}$ пропорциональна количеству распадающегося вещества).

2) $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t,\vec{r},\dfrac{d\vec{r}}{dt})$ –

уравнение движения точки массы m под влиянием силы $\boldsymbol{F}$, зависящей от времени, положения точки, определяемого радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, и ее скорости $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Сила равна произведению массы на ускорение.

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x,y,z)$ –

уравнение Пуассона, задающее зависимость между многими физическими величинами. Например, можно считать, что $u(x,y,z)$ – потенциал электростатического поля, а $\rho(x,y,z)$ – плотность зарядов.

Мы будем рассматривать уравнения, где неизвестная функция является функцией одной переменной. Такие уравнения называются **обыкновенными дифференциальными уравнениями**.

Уравнение вида

$$F(x,u(x),u'(x),u''(x),...,u^{(n)}(x)) = 0 \quad (1)$$

называется **обыкновенным дифференциальным уравнением *n*-го порядка**. При этом **порядком** уравнения называется максимальный порядок входящей в него производной.

Функция, которая при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество, называется **решением** дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \quad (2)$$

Можно показать, что общее решение такого уравнения зависит от одной произвольной постоянной. С геометрической точки зрения уравнение (2) устанавливает зависимость между координатами точки на плоскости и угловым коэффициентом $\frac{dy}{dx}$ касательной к графику решения в той же точке. Следовательно, уравнение (2) определяет некоторое поле направлений, и задача его решения состоит в том, чтобы найти кривые, называемые **интегральными кривыми**, направление касательных к которым в каждой точке плоскости совпадает с направлением этого поля.

Примеры.

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

В каждой точке, кроме начала координат, угловой коэффициент к искомой интегральной кривой равен $\frac{y}{x}$, то есть тангенсу угла, образованного с осью Ox прямой, проходящей через данную точку и начало координат. Следовательно, интегральными кривыми в данном случае будут прямые вида $y = cx$ (рис.1).

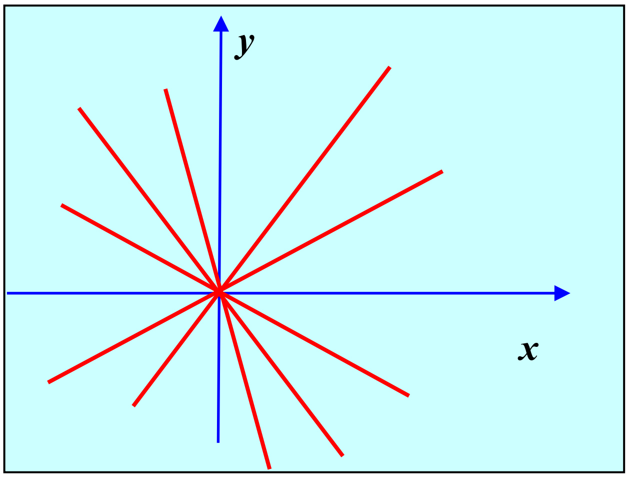


Рис. 1

2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

В этом случае касательная в каждой точке плоскости перпендикулярна направлению прямой, проходящей через эту точку и начало координат, так как угловые коэффициенты этих прямых удовлетворяют условию ортогональности:

$$-\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=-1.$$

Поэтому направление касательной в данной точке совпадает с направлением касательной к окружности с центром в начале координат, на которой лежит выбранная точка. Такие окружности и являются интегральными кривыми данного уравнения (рис. 2).

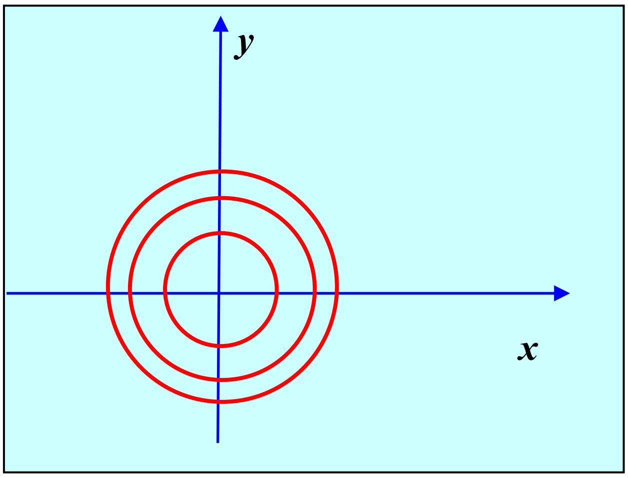


Рис. 2

Часто для построения интегральных кривых удобно предварительно найти геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление. Такие линии называются **изоклинами**.

Пример.
Изоклины уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}$$

задаются уравнениями

$$\sqrt{x^2+y^2}=k \quad \textit{или} \quad x^2+y^2=k^2,$$

так как на каждой изоклине производная $\frac{dy}{dx}$ должна сохранять постоянное значение. Полученные уравнения задают семейство концентрических окружностей с центром в начале координат, а угловой коэффициент касательной к интегральной кривой равен радиусу проходящей через данную точку окружности.

Задача Коши для уравнения первого порядка

Как уже было сказано, общим решением уравнения (2) является все множество функций, обращающих при подстановке рассматриваемое уравнение в тождество. Пусть теперь требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, \qquad (3)$$

называемому **начальным условием**. Если общее решение уравнения (2) задается формулой

$$y = \varphi(x, C), \qquad (4)$$

то значение постоянной C, соответствующее поставленному начальному условию, можно определить, подставив в равенство (4) $x = x_0$ и $y = y_0$.
Задача выбора из общего решения (4) уравнения (2) решения, удовлетворяющего начальному условию (3), называется **задачей Коши**, а выбранное решение называется **частным решением** уравнения (2).
Замечание. Если воспринимать множество всех решений уравнения (2) как множество интегральных кривых на плоскости, то ставится задача поиска той из них, которая проходит через точку с координатами (x_0, y_0). Выясним, при каких условиях такая кривая существует и является единственной.

Теорема существования и единственности задачи Коши

Рассмотрим предварительно метод приближенного решения дифференциальных уравнений, обоснование которого будет дано в приведенной ниже теореме.

Метод Эйлера

Метод Эйлера заключается в том, что искомая интегральная кривая уравнения (2), проходящая через точку (x_0, y_0), заменяется ломаной, каждое звено которой касается интегральной кривой в одной из своих граничных точек (рис. 3).

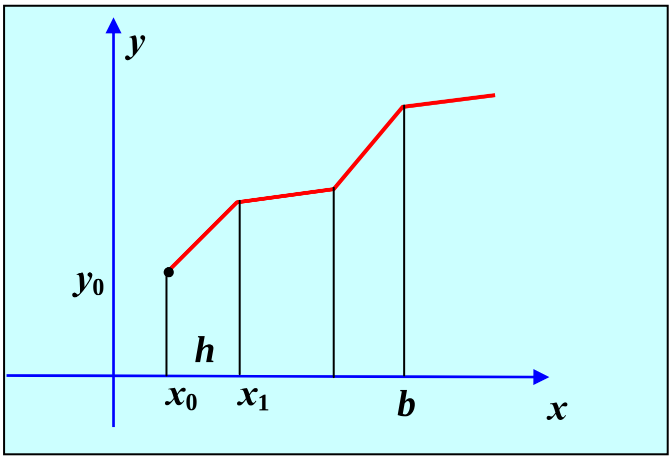


Рис. 3

Пусть требуется найти приближенное значение искомого решения при $x = b$. Разделим отрезок $[x_0, b]$ на n равных частей (полагаем, что $b > x_0$) и назовем шагом вычисления h длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Заменим на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую отрезком ее касательной в точке (x_0, y_0). Ордината этого отрезка при $x = x_1$ равна $y_1 = y_0 + hy_0'$, где $y_0' = f(x_0, y_0)$. Так же найдем

$$y_2 = y_1 + hy_1', \quad где \quad y_1' = f\ \ x_1, y_1\ \ ;$$

$$y_3 = y_2 + hy_2', \quad где \quad y_2' = f\ \ x_2, y_2\ \ ;$$

....

$$y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}', \quad где \quad y_{n-1}' = f\ \ x_{n-1}, y_{n-1}\ \ .$$

Можно предположить, что при $h \to 0$ построенные таким образом **ломаные Эйлера** приближаются к графику искомой кривой. Доказательство этого утверждения будет дано в следующей теореме:

Теорема 1 (теорема существования и единственности решения). Если в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

функция *f(x,y)* непрерывна в прямоугольнике *D*:

$$x_0 - a \le x \le x_0 + a, \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b \quad (5)$$

и удовлетворяет в *D* **условию Липшица**:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N|y_1 - y_2|, \quad (6)$$

где *N* – постоянная, то существует единственное решение

$$y = \overline{y}(x), \quad x_0 - H \le x \le x_0 + H,$$

уравнения (2), удовлетворяющее условию (3) , где

$$H < \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}), \quad M = \max f(x,y) \quad в \quad D.$$

Замечание 1. Нельзя утверждать, что искомое решение будет существовать при $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, так как интегральная кривая может выйти из прямоугольника (5), и тогда решение может быть не определено.

Замечание 2. Условие Липшица (6) можно заменить более сильным требованием

$$|f_y'(x,y)| \le N \quad в \quad D.$$

Тогда по теореме Лагранжа

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = f_y'(x,\xi)|y_1 - y_2|, \quad где \quad y_1 \le \xi \le y_2.$$

Таким образом,

$$\xi \in D \quad и \quad |f_y'(x,\xi)| \le N.$$

Поэтому

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N|y_1 - y_2|.$$

Доказательство теоремы 1.

Заменим уравнение (2) с начальным условием (3) эквивалентным интегральным уравнением

$$y = y_0 + \int_{x_o}^{x} f(x,y)dx. \qquad (7)$$

Легко проверить, что функция, обращающая в тождество уравнение (2), будет решением и уравнения (7).

Построим ломаную Эйлера $y = y_n(x)$, исходящую из точки (x_0, y_0) с шагом $h_n = \dfrac{H}{n}$ на отрезке $[x_0, x_0 + H]$ (аналогично можно доказать существование решения на $[x_0 - H, x_0]$). Такая ломаная не может выйти за пределы D, так как угловые коэффициенты каждого ее звена по модулю меньше M. Теперь докажем последовательно три утверждения:

1) Последовательность $y = y_n(x)$ равномерно сходится.
2) Функция

$$\bar{y}(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

является решением интегрального уравнения (7).

3) Решение $\bar{y}(x)$ уравнения (7) единственно.

Доказательство 1). По определению ломаной Эйлера

$$y_n'(x) = f(x_k, y_k) \quad при \quad x_k \le x \le x_{k+1}, k = 0,1,...,n-1,$$

или

$$y_n'(x) = f(x, y_n(x)) + (f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x)). \quad (8).$$

Обозначим

$$f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x)) = \eta_n(x),$$

тогда в силу равномерной непрерывности $f(x)$ в D

$$|\eta_n(x)| = |f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon_n \quad (9)$$

при $n > N(\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как

$$|x - x_k| \le h_n, \quad а \quad |y_k - y_n(x)| < Mh_n,$$

$$и \quad h_n = \frac{H}{n} \to 0 \quad при \quad n \to \infty.$$

Интегрируя (8) по x в пределах от x_0 до x и учитывая, что $y_n(x_0) = y_0$, получим:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt. \quad (10)$$

Так как n – любое целое положительное число, то для любого $m > 0$

$$y_{n+m}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n+m}(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt,$$

откуда

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt - \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt \right| \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))|\,dt + \int_{x_0}^{x} |\eta_{n+m}(t)|\,dt + \int_{x_0}^{x} |\eta_n(t)|\,dt.$$

Тогда из (9) и условия Липшица следует, что

$$|y_{n+m}(x)-y_n(x)|\le N\int_{x_0}^{x}|y_{n+m}(t)-y_n(t)|\,dt+(\varepsilon_{n+m}+\varepsilon_n)H.$$

Следовательно,

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_{n+m}(x)-y_n(x)|\le$$

$$\le N\max\int_{x_0}^{x}|y_{n+m}(t)-y_n(t)|\,dt+(\varepsilon_{n+m}+\varepsilon_n)H,$$

откуда

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_{n+m}(x)-y_n(x)|\le\frac{(\varepsilon_{n+m}+\varepsilon_n)H}{1-NH}<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\quad при\quad n>N_1(\varepsilon),$$

то есть последовательность непрерывных функций $y_n(x)$ равномерно сходится при $x_0\le x\le x_0+H$ к непрерывной функции $\overline{y}(x)$. Итак, утверждение 1) доказано.

Доказательство 2). Перейдем в (10) к пределу при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\overline{y}(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,y_n(t))dt+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}\eta_n(t)dt.\quad(11).$$

В силу равномерной сходимости $y_n(x)$ к $\overline{y}(x)$ и равномерной непрерывности $f(x,y)$ в D последовательность $f(x,y_n(x))$ равномерно сходится к $f(x,\ \overline{y}(x))$. Действительно,

$$|f(x,\overline{y}(x))-f(x,y_n(x)|<\varepsilon\quad при\quad|\overline{y}(x)-y_n(x)|<\delta(\varepsilon),$$

что выполняется при

$$n>N_1(\delta(\varepsilon))\quad\forall x\in[x_0,x_0+H].$$

Следовательно, возможен переход к пределу под знаком интеграла. Учитывая, что

$$|\eta_n(\varepsilon)|<\varepsilon_n,\quad где\quad\varepsilon_n\to 0\quad при\quad n\to\infty,$$

получим из (11):

$$\overline{y}(x)=y_0+\int_{x_o}^{x}f(x,\overline{y}(x))dx,$$

то есть $\overline{y}(x)$ удовлетворяет уравнению (7). Утверждение 2) доказано.

Доказательство 3). Предположим, что существуют два различных решения уравнения (7): $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то есть

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)|\ne 0.$$

Тогда, подставляя эти функции в (7) и вычитая полученные равенства друг из друга, получим:

$$y_1(x)-y_2(x)\equiv\int_{x_0}^{x}(f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x)))dx,$$

откуда

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|y_1(x)-y_2(x)\right|=$$

$$=\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\int_{x_0}^{x}(f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x)))dx\right|\le$$

$$\le\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))|\,dx\right|.$$

Применим к этому неравенству условие Липшица:

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)|\le$$

$$\le N\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\int_{x_0}^{x}|y_1(x)-y_2(x)|\,dx\right|\le$$

$$\le N\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)|\cdot\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|\int_{x_0}^{x}dx\right|=$$

$$=NH\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)|.$$

Если

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|y_1(x)-y_2(x)\right|\ne 0,$$

то полученное равенство:

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)|\le NH\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)|$$

противоречиво, так как по условию теоремы $H<\dfrac{1}{N}$. Следовательно,

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|y_1(x)-y_2(x)\right|=0,\quad \textit{то}\quad\textit{есть}\quad y_2\equiv y_1.$$

Примеры решения задач

Задача 1.

Найти общее решение уравнения

$$y'''=x.$$

Указание

Найдите y'':

$$y''=\int y'''dx+C_1\quad \textit{и т.д.}$$

Решение

$$y'' = \int y''' dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$y' = \int y'' dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^4}{24} + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 =$$

$$= \frac{x^4}{24} + \tilde{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{24} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$

Задача 2.
Решить задачу Коши:

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad y(0) = 2.$$

Указание

Найдите общее решение уравнения:

$$y = \int y' dx + C,$$

а затем определите C из условия $y(0) = 2$.

Решение

Общее решение уравнения:

$$y = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = arctgx + C;$$

$$2 = arctg0 + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y_{частн} = arctgx + 2.$$

Ответ: $y = arctgx + 2.$

Задача 3.
Найдите интегральную кривую уравнения

$$yy' = x + 5,$$

проходящую через точку (1;-5).

Указание

Запишите левую часть уравнения в виде $\left(\dfrac{y^2}{2} \right)'$.

Решение

$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = x+5, \quad \frac{y^2}{2} = \int x+5\ dx = \frac{x^2}{2}+5x+C,$$

$$y = \pm\sqrt{x^2+10x+2C}; \quad -5 = -\sqrt{x^2+10x+2C};$$

$$2C+11=25, \quad C=7, \quad y = -\sqrt{x^2+10x+14}.$$

Ответ: $y = -\sqrt{x^2+10x+14}$.

Задача 4.
Изоклинами уравнения

$$y' = 1+xy$$

являются:

Указание

Уравнение изоклин имеет вид: $1 + xy = C$.

Решение

Уравнение изоклин имеет вид:

$$1+xy=C \Rightarrow xy = C-1, \quad y = \frac{C-1}{x} \quad -$$

гиперболы.
Ответ: гиперболы.

2.1.2. Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородных, линейных и сводящихся к ним)

1. *Уравнения с разделяющимися переменными*

Дифференциальные уравнения вида

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \qquad (1)$$

называются **уравнениями с разделяющимися переменными**. Тогда любое решение $y(x)$ этого уравнения будет удовлетворять и уравнению

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + c, \quad (2)$$

где c – произвольная постоянная. Если удается найти первообразные функций $f_1(x)$ и $f_2(y)$, выраженные в элементарных функциях, то из (2) можно получить конечное уравнение

$$\Phi(x,y) = C, \qquad (3)$$

которое определяет решение $y(x)$ уравнения (1) как неявную функцию x.
Уравнение вида (3) называется **интегралом** уравнения (1), а если оно определяет все решения (1) – **общим интегралом** этого уравнения.

Пример 1.

$\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy.$

Приведем уравнение к виду (1):

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{dx}{x}, \quad \text{откуда} \quad \int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int\frac{dx}{x} + C.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C.$$

Полученное уравнение можно считать общим интегралом или решением исходного уравнения.

Если требуется найти **частное решение** уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, достаточно подставить значения x_0 и y_0 в уравнение (3) и найти значение C, соответствующее начальному условию.

Пример 2.

Найти решение уравнения $y'\text{ctg}\,x + y = 2$, удовлетворяющее условию $y(0) = -1$.

Разделим переменные:

$$\int\frac{dy}{2-y} = \int\frac{\sin x dx}{\cos x} + c,$$

$$-\ln|2-y| = -\ln|\cos x| - \ln|c|,$$

$$2 - y = c\cos x.$$

Подставив в это равенство $x = 0$ и $y = -1$, получим, что $c = 3$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y = 2 - 3\cos x$.

2. *Уравнения, приводимые к уравнениям с разделяющимися переменными*

Если требуется решить уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by), \qquad (4)$$

где a и b – постоянные числа, то с помощью замены переменной $z = ax+by$ оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z), \quad \frac{dz}{a+bf(z)} = dx.$$

Пример 3.

$y' = \sqrt{4x+2y-1}.$

Замена: $z = 4x + 2y - 1$, тогда

$$\int\frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = \int dx + c.$$

Вычислим интеграл в левой части равенства: замена

$$u = \sqrt{z}, z = u^2, \quad dz = 2udu$$

приводит к

$$\int \frac{2udu}{4+2u} = \int \left(1 - \frac{4}{4+2u}\right) du = u - 2\ln|4+2u| =$$

$$= \sqrt{z} - 2\ln(4+2\sqrt{z}) = \sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(4+2\sqrt{4x+2y-1}.$$

Проинтегрировав теперь правую часть равенства, получим общий интеграл:

$$\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(4+2\sqrt{4x+2y-1} = x + c.$$

3.Однородные уравнения

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые **однородные дифференциальные уравнения первого порядка**, имеющие вид:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (5)$$

Действительно, замена $t = \frac{y}{x}$ или $y = xt$ приводит к

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t, \quad x\frac{dt}{dx} + t = f(t),$$

$$\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dt}{f(t)-t} = \ln|x| + \ln c, \quad x = ce^{\int \frac{dt}{f(t)-t}}.$$

Еще одной формой однородного уравнения является уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \quad (6)$$

если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одинаковой степени однородности. При этом

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример 4.

$y^2 + x^2y' = xyy'$. Преобразуем уравнение к виду (5):

$$y'(xy - x^2) = y^2, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}.$$

После замены $y = xt$ получим:

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{t^2}{t-1}, \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{t}{t-1}, \quad \frac{(t-1)dt}{t} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{t}dt\right) = \int \frac{dx}{x} + c, \quad t - \ln|t| = \ln|x| + \ln|C|,$$

$$Cxt = e^t, \quad Cy = e^{\frac{y}{x}}.$$

В однородные можно преобразовать и уравнения вида

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \quad (7)$$

с помощью замены $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$, где x_1, y_1 – решение системы уравнений

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

(С геометрической точки зрения производится перенос начала координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$). Тогда, поскольку $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$, в новых переменных уравнение примет вид:

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) \quad или \quad \frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right) \quad -$$

однородное уравнение.

Пример 5.

$(y + 2)\,dx = (2x + y - 4)dy$. Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+2}{2x+y-4}.$$

Решением системы $y + 2 = 0$, $2x + y - 4 = 0$ будут $x_1 = 3$, $y_1 = -2$. В новых переменных $X = x - 3$, $Y = y + 2$ получим однородное уравнение

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y}{2X+Y},$$

которое можно решить с помощью обычной замены $Y = Xt$. Тогда

$$X\frac{dt}{dX}+t=\frac{t}{2+t}, \quad -X\frac{dt}{dX}=\frac{t^2+t}{t+2},$$

$$\frac{(t+2)dt}{t(t+1)}=-\frac{dX}{X}, \quad \int\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t}\right)dt=-\int\frac{dX}{X}+c,,$$

$$\ln\left|\frac{t^2}{t+1}\right|=-\ln|X|+\ln|C|,$$

и после обратной замены общий интеграл выглядит так:

$$(y+2)^2=C(x+y-1).$$

Заметим, в это общее решение входит при C=0 и частное решение $y = 1 - x$, которое могло быть потеряно при делении на $y + x - 1$.

4. *Линейные уравнения*

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x), \quad (8)$$

линейное относительно неизвестной функции $y(x)$ и ее производной. При этом будем предполагать, что $p(x)$ и $f(x)$ непрерывны.

В случае, когда $f(x) \equiv 0$, уравнение (8) называется **однородным**. Такое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \textit{откуда} \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln c,$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (9)$$

При делении на y могло быть потеряно решение $y = 0$, но оно входит в общее решение при $C = 0$.

Для решения неоднородного уравнения (8) применим **метод вариации постоянной**. Предположим, что общее решение уравнения (8) имеет форму (9), в которой C – не постоянная, а неизвестная функция аргумента x:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (8), получим:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

откуда

$$\frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}, C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c,$$

$$y = ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (10)$$

Замечание. При решении конкретных задач удобнее не использовать в готовом виде формулу (10), а проводить все указанные преобразования последовательно.

Пример 6.

Найдем общее решение уравнения $y' = 2x(x^2 + y)$. Представим уравнение в виде:

$y' - 2xy = 2x^3$ и решим соответствующее однородное уравнение: $y' - 2xy = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad \frac{dy}{y} = 2xdx, \quad \int\frac{dy}{y} = \int 2xdx + C_1,$$

$$\ln|y| = x^2 \ln|C|, y = Ce^{x^2}.$$

Применим метод вариации постоянных: пусть решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = C(x)e^{x^2}, \quad \textit{тогда} \quad \frac{dy}{dx} = C'e^{x^2} + C(x)e^{x^2}\cdot 2x.$$

Подставим полученные выражения в уравнение:

$$C'e^{x^2} + C(x)e^{x^2}\cdot 2x - 2xC(x)e^{x^2} = 2x^3.$$

Следовательно,

$$C' = 2x^3 e^{-x^2},$$

$$C(x) = \int 2x^3 e^{-x^2} dx = \int x^2 e^{-x^2} dx^2 =$$

$$= \int te^{-t} dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt =$$

$$= -te^{-t} - e^{-t} + c = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + c.$$

При этом общее решение исходного уравнения

$$y = (-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + c)e^{x^2} = ce^{x^2} - x^2 - 1.$$

К линейным уравнениям можно свести с помощью замены некоторые другие дифференциальные уравнения, например, **уравнение Бернулли**:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, \quad n \neq 1. \quad (11)$$

Разделив на y^n, получим:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x),$$

а замена

$$z = y^{-n}, \quad \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

приводит к линейному уравнению относительно z:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x).$$

Пример 7.

$$y' = y^4 \cos x + ytgx, \quad y' - ytgx = y^4 \cos x,$$

$$\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^3}tgx = \cos x.$$

Сделаем замену:

$$z = \frac{1}{y^3}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{3}{y^4}\frac{dy}{dx}.$$

Относительно z уравнение стало линейным:

$$-\frac{1}{3}z' - ztgx = \cos x.$$

Решим однородное уравнение:

$$\frac{dz}{3dx} = -ztgx, \frac{dz}{z} = \frac{-3\sin x dx}{\cos x}, \quad \ln|z| = 3\ln|\cos x| + \ln C_1,$$

$$z = C\cos^3 x.$$

Применим метод вариации постоянных:

$$z = C(x)\cos^3 x, \quad \frac{dz}{dx} = C'\cos^3 x - 3C(x)\cos^2 x \sin x.$$

Подставим эти результаты в неоднородное уравнение:

$$-\frac{1}{3}C'\cos^3 x + C(x)\cos^2 x\sin x - C(x)\cos^3 x tgx = \cos x,$$

$$C' = -\frac{3}{\cos^2 x}, \quad C(x) = -\int\frac{3dx}{\cos^2 x} = -3tgx + c.$$

Окончательно получаем:

$$y^{-3} = (-3tgx + c)\cos^3 x = c\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x.$$

Дополним это общее решение частным решением $y = 0$, потерянным при делении на y^4.

Примеры решения задач

Задача 1.

Найти общее решение уравнения

$$y' = e^{4x}\cdot y^5.$$

Указание

Разделите переменные и приведите уравнение к виду

$$\frac{dy}{y^5} = e^{4x}dx.$$

Решение

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y^5} = e^{4x}dx, \quad \int\frac{dy}{y^5} = \int e^{4x}dx, \quad \frac{y^{-4}}{-4} = \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{C}{4},$$

$$e^{4x} + y^{-4} = C.$$

Ответ: $e^{4x} + y^{-4} = C.$

Задача 2.

Решить задачу Коши:

$$(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0, \quad y(-1) = 2.$$

Указание

Сделайте замену:

$$t = x + y.$$

Решение

Обратим внимание на то, что коэффициенты при x и y в выражениях $2x + 2y - 1$ и $x + y - 2$ пропорциональны. Поэтому можно ввести новую неизвестную функцию, относительно которой исходное уравнение станет уравнением с разделяющимися переменными: $t = x + y$. Тогда

$$dy = d(t - x) = dt - dx,$$

и уравнение примет вид:

$$(2t-1)dx + (t-2)(dt - dx) = 0,$$

$$(t-2)dt = -(t+1)dx,$$

$$\frac{(t-2)dt}{t+1} = -dx, \quad \int\left(1 - \frac{3}{t+1}\right)dt = -\int dx,$$

$$t - 3\ln|t+1| = -x - \ln|C|, \quad (t+1)^3 = Ce^{x+t},$$

$$(x+y+1)^3 = Ce^{2x+y}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y(-1) = 2 \Rightarrow (-1+2+1)^3 = Ce^{-2+2},$$

$$8 = Ce^0, \quad C = 8, \quad (x+y+1)^3 = 8e^{2x+y} \quad -$$

искомое частное решение.

Ответ: $(x+y+1)^3 = 8e^{2x+y}$.

Задача 3.

Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + 2\frac{x^2+y^2}{x^2}.$$

Указание

Сделайте замену

$$t = \frac{y}{x}.$$

Решение

Сделаем стандартную замену, применяемую при решении однородных уравнений:

$$t = \frac{y}{x}, \quad y = tx, \quad y' = t'x + t.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$t'x + t = t + 2(1+t^2), \quad \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2dx}{x},$$

$$\int\frac{dt}{1+t^2} = \int\frac{2dx}{x}, \quad arctg\, t = 2\ln|x| + \ln|C|,$$

$$arctg\frac{y}{x} = \ln(Cx^2), \quad y = xtg\ \ln(Cx^2)\ .$$

Ответ: $y = xtg\ \ln(Cx^2)$.

Задача 4.

Решить задачу Коши:

$$(12x+5y-9)dx+(5x+2y-3)dy=0,$$
$$y(0)=3.$$

Указание

Сделайте замену:

$$\overline{x}=x-x_0,\quad \overline{y}=y-y_0,$$

где (x_0, y_0) – решение системы

$$\begin{cases}12x+5y-9=0,\\ 5x+2y-3=0.\end{cases}$$

Решение

Решим систему

$$\begin{cases}12x+5y-9=0\\ 5x+2y-3=0\end{cases}\Rightarrow x_0=-3,\quad y_0=9,$$

и перейдем к новым переменным:

$$\overline{x}=x+3,\quad \overline{y}=y-9.$$

При этом

$$d\overline{x}=dx,\quad d\overline{y}=dy,$$

и уравнение становится однородным:

$$(12\overline{x}+5\overline{y})d\overline{x}+(5\overline{x}+2\overline{y})d\overline{y}=0,$$

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}=-\frac{12\overline{x}+5\overline{y}}{5\overline{x}+2\overline{y}}=-\frac{12+5\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}{5+2\frac{\overline{y}}{\overline{x}}},\quad t=\frac{\overline{y}}{\overline{x}},$$

$$t'\overline{x}+t=-\frac{12+5t}{5+2t},\quad t'\overline{x}=-\frac{2t^2+10t+12}{5+2t},$$

$$-\int\frac{(5+2t)dt}{t^2+5t+6}=2\int\frac{d\overline{x}}{\overline{x}},\quad -\int\frac{d(t^2+5t+6)}{t^2+5t+6}=2\int\frac{d\overline{x}}{\overline{x}},$$

$$-\ln|t^2+5t+6|=2\ln|\overline{x}|-\ln|C|,$$

$$\overline{x}^2(t^2+5t+6)=C,\quad \overline{x}^2\left(\frac{\overline{y}^2}{\overline{x}^2}+5\frac{\overline{y}}{\overline{x}}+6\right)=C,$$

$$\overline{y}^2+5\overline{x}\overline{y}+6\overline{x}^2=C,$$

$$(y-9)^2+5(x+3)(y-9)+6(x+3)^2=C,$$

$$6x^2+5xy+y^2-9x-3y=C.$$

Найдем частное решение:

$$y(0)=3,\quad 9-9=C,\quad C=0,$$
$$6x^2+5xy+y^2-9x-3y=0.$$
Ответ: $6x^2+5xy+y^2-9x-3y=0.$

Задача 5.
Найти общее решение уравнения
$$y'=8xy+4e^{4x^2}\sin 2x.$$

Указание

Найдите решение однородного уравнения
$$y'=8xy,$$
а затем примените метод вариации постоянных.

Решение

Найдем решение однородного уравнения:
$$y'=8xy,\quad \int\frac{dy}{y}=\int 8xdx,\quad \ln|y|=4x^2+\ln|C|,$$
$$y_{одн}=Ce^{4x^2}.$$
Применим метод вариации постоянных:
$$y_{неодн}=C(x)e^{4x^2},\quad y'=C'e^{4x^2}+8Cxe^{4x^2},$$
$$C'e^{4x^2}+8Cxe^{4x^2}=8xCe^{4x^2}+4e^{4x^2}\sin 2x,$$
$$C'=4\sin 2x,\quad C=4\int\sin 2xdx=-2\cos 2x+\bar{C};$$
$$y=e^{4x^2}(C-2\cos 2x).$$
Ответ: $y=e^{4x^2}(C-2\cos 2x).$

Задача 6.
Решить задачу Коши:
$$y'-\frac{3y}{x}+x^3y^2=0,\quad y(1)=7.$$

Указание

Сделав замену
$$z=\frac{1}{y},$$
вы получите линейное уравнение для z.

Решение

Разделим обе части равенства на y^2:

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{y}+x^3=0, \quad -\frac{y'}{y^2}+\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{y}=x^3.$$

$$z=\frac{1}{y}\Rightarrow z'=-\frac{1}{y^2}y'\Rightarrow z'+\frac{3z}{x}=x^3 \quad -$$

линейное уравнение. Найдем решение однородного уравнения:

$$z'+\frac{3z}{x}=0, \quad \int\frac{dz}{z}=-3\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|z|=-3\ln|x|+\ln|C|, \quad z_{одн}=\frac{C}{x^3}.$$

Применим метод вариации постоянных:

$$z_{неодн}=\frac{C(x)}{x^3}, \quad z'=C'x^{-3}-3Cx^{-4}=\frac{C'x-3C}{x^4},$$

$$\frac{C'x-3C}{x^4}+\frac{3C}{x^4}=x^3, \quad C'=x^6, \quad C=\frac{x^7}{7}+\frac{\bar{C}}{7},$$

$$z=\frac{x^7+C}{7x^3}, \quad y=\frac{7x^3}{x^7+C}.$$

Найдем частное решение:

$$y(1)=7, \quad \frac{7}{C+1}=7, \quad C=0, \quad y=\frac{7}{x^4}.$$

Ответ: $y=\frac{7}{x^4}$.

2.2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы линейных дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0, \quad (1)$$

где F предполагается непрерывной функцией всех своих аргументов. Тогда по теореме о существовании неявной функции можно разрешить это уравнение относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\ldots y^{(n-1)}\right) \quad (2)$$

и сформулируем для него (без доказательства) теорему существования и единственности решения:

Теорема 1. Существует единственное решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0,...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

если в окрестности начальных значений (x_0 , y_0 , y'_0 **,…,** $y_0^{(n-1)}$) функция f является непрерывной функцией всех своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Замечание 1. Так же, как и для дифференциального уравнения 1-го порядка, задача отыскания решения уравнения (2), удовлетворяющего условиям (3), называется **задачей Коши**.

Замечание 2. Теорема 1 утверждает существование частного решения уравнения (2), удовлетворяющего данным начальным условиям. С геометрической точки зрения это соответствует существованию интегральной кривой, проходящей через точку $(x_0, y_0, y'_0,..., y_0^{(n-1)})$. Но, используя эту теорему, можно доказать и существование **общего решения** уравнения (2), содержащего n произвольных постоянных и имеющего вид:

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n) \quad (4)$$

или, в неявной форме:

$$\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0. \quad (5)$$

Соотношение (5) будем называть **общим интегралом** уравнения (1) или (2).

Уравнения, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях порядок дифференциального уравнения может быть понижен, что обычно облегчает его интегрирование. Рассмотрим несколько типов подобных уравнений.

1. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных по порядок (k – 1) включительно:

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0. \quad (6).$$

В этом случае можно сделать замену $p = y^{(k)}$, которая позволяет понизить порядок уравнения до $n-k$, так как после замены уравнение примет вид

$$F(x,p,p',...,p^{(n-k)})=0.$$

Из этого уравнения можно найти $p = p\,(x, C_1, C_2,..., C_{n-k})$, а затем найти y с помощью интегрирования k раз функции $p = p\,(x, C_1, C_2,..., C_{n-k})$.

Пример 1.

Уравнение

$$y'''=y''^2$$

при замене

$$p(x)=y''$$

становится уравнением 1-го порядка относительно p:

$$p' = p^2, \quad \textit{откуда} \quad \frac{dp}{p^2} = dx,$$

$$-\frac{1}{p} = x + C_1, \quad p = -\frac{1}{x + C_1}.$$

Тогда

$$y' = \int p(x)dx = -\int \frac{dx}{x + C_1} = -\ln(x + C_1) + C_2,$$

$$y = \int y'dx = -\int (\ln(x + C_1) - C_2)dx =$$

$$= -\int \ln(x + C_1)dx + C_2x + C_3 =$$

$$= -x\ln(x + C_1) + \int \frac{x}{x + C_1}dx + C_2x + C_3 =$$

$$= -x\ln(x + C_1) + x - C_1\ln(x + C_1) + C_2x + C_3 =$$

$$= C_3 + \bar{C}_2x - (x + C_1)\ln(x + C_1).$$

2. Уравнение не содержит независимой переменной:

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \quad (7)$$

Порядок такого уравнения можно понизить на единицу заменой $y' = p(y)$. При этом производные функции $f(x)$ по аргументу x нужно выразить через производные p по y:

$$\frac{dy}{dx} = p(x), \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p \cdot p' \quad \textit{и т. д.}$$

Пример 2.

$y'' = 2yy'.$

Пусть

$$y' = p(y), \quad y'' = p \cdot p', \quad \textit{тогда} \quad pp' = 2yp.$$

Отметим частное решение $p = 0$, то есть $y' = 0, \quad y = C$. Если $p \neq 0$, после сокращения на p получим

$$\int dp = \int 2ydy,$$

$$p = y^2 + C_1, \int \frac{dy}{y^2 + C_1} = \int dx, \frac{1}{C_1}arctg\frac{y}{C_1} =$$

$$= x + C_2, y = C_1tg(C_1x + \bar{C}_2).$$

3. Уравнение $F\ (x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n)}) = 0$ однородно относительно аргументов y, $y', \ldots, y^{(n)}$, то есть справедливо тождество

$$F(x, ky, ky', ky'', \ldots, ky^{(n)}) = k^pF(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

В этом случае можно понизить порядок уравнения на единицу, вводя новую неизвестную функцию z, для которой $y = e^{\int z dx}$. Тогда

$$y' = e^{\int z dx} z, \quad y'' = e^{\int z dx}(z^2 + z') \quad \text{и т. д.}$$

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \varphi(x). \quad (8)$$

Если $\varphi(x) \equiv 0$, уравнение называется **линейным однородным**.

Если $a_0(x)$ не равно нулю ни в одной точке некоторого отрезка $[a,b]$, линейное однородное уравнение удобно записывать в форме

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (9)$$

или

$$y^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y^{(n-i)}. \qquad (9')$$

Замечание 1. Если коэффициенты $p_i(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то в окрестности любых начальных значений при $x_0 \in [a,b]$ удовлетворяются условия теоремы существования и единственности.

Замечание 2. Линейность и однородность уравнения сохраняются при любом преобразовании $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - n раз дифференцируемая функция и $\varphi'(t) \neq 0$ на $[a,b]$, так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{(\varphi'(t))^2} - \frac{dy}{dt}\frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} \quad \text{и т. д.},$$

то есть производная любого порядка по x является линейной однородной функцией производных по t.

Замечание 3. Линейность и однородность уравнения сохраняются также при линейном однородном преобразовании неизвестной функции $y(x) = \alpha(x)z(x)$.

Назовем **линейным дифференциальным оператором**

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \quad (10)$$

результат применения к функции y операций, задаваемых левой частью уравнения (9).

При этом уравнение (9) можно записать в виде $L[y] = 0$.

Свойства линейного дифференциального оператора

1) Постоянный множитель выносится за знак линейного оператора:

$$L[cy] = cL[y], \text{ так как } (cy)^{(i)} = cy^{(i)}.$$

2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.

Действительно, $(y_1 + y_2)^{(i)} = y_1^{(i)} + y_2^{(i)}$, откуда следует справедливость сформулированного свойства.
Следствие.

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} c_i L[y_i]. \quad (11)$$

Свойства решений линейного уравнения

Используя свойства линейного оператора, можно указать некоторые свойства решений линейного однородного уравнения (9).

Теорема 1. Если y_1 – решение уравнения (9), то и cy_1, где c – произвольная постоянная, – тоже решение этого уравнения.
Доказательство. Если $L[y_1] = 0$, то по свойству 1) линейного оператора $L[cy_1] = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Сумма $y_1 + y_2$ решений уравнения (9) тоже является решением этого уравнения.
Доказательство. Так как $L[y_1] = 0$ и $L[y_2] = 0$, по свойству 2) линейного оператора $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0$, что доказывает утверждение теоремы.

Следствие теорем 1 и 2. Линейная комбинация $\sum_{i=1}^{m} c_i y_i$ решений уравнения (9) $y_1, y_2, \ldots, y_m$ с произвольными постоянными коэффициентами тоже является решением этого уравнения.

Если рассматривается линейное неоднородное уравнение (8), которое при $a_0(x) \neq 0$ можно записать в виде

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x) \quad (12)$$

или $L[y] = f(x)$, то при непрерывности функций $p_i(x)$ и $f(x)$ оно имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (3). Из свойств линейного оператора следуют свойства решений неоднородного линейного уравнения:

1) Сумма $\tilde{y} + y_1$ решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения (12) и решения y_1 соответствующего однородного уравнения (9) является решением неоднородного уравнения (12).
Доказательство.

$$L[\tilde{y} + y_1] = L[\tilde{y}] + L[y_1] = f(x) + 0 = f(x).$$

2) Если y_i – решение уравнения $L[y] = f_i(x)$, то $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$ является решением уравнения

$$y' = \int y'' dx = \int\left(C_1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = C_1 x + ctgx + C_2;$$

$$y = \int y' dx = \int\ C_1 x + ctgx + C_2\ dx =$$

$$= \frac{C_1}{2}x^2 + \ln|\sin x| + C_2 x + C_3 =$$

$$= \ln|\sin x| + \tilde{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

$$L[y] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x),$$

где α_i – постоянные (принцип **суперпозиции** или наложения).

Доказательство.

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} L[\alpha_i y_i] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i L[y_i] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x),$$

что и требовалось доказать.

Примеры решения задач

Задача 1.

Найти общее решение уравнения

$$y''' \sin^4 x = \sin 2x.$$

Указание

Используйте то, что

$$y'' = \int y''' dx \quad и\ т.\,д.$$

Решение

$$y''' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x}, \quad y'' = \int y''' dx = \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x} dx =$$

$$= \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{d(\sin^2 x)}{(\sin^2 x)^2} = C_1 - \frac{1}{\sin^2 x};$$

Ответ: $y = \ln|\sin x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$

Задача 2.

Найти общее решение уравнения

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$$

Указание

Сделайте замену:

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x).$$

Решение

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x);$$
$$(1 - x^2)p' - xp = 2.$$

Однородное уравнение:

$$(1 - x^2)p' - xp = 0, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{xdx}{1 - x^2},$$
$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|1 - x^2| + \ln|C_1|, \quad p_{одн} = \frac{C_1}{\sqrt{1 - x^2}};$$
$$p_{неодн} = \frac{C_1(x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad p' = C_1'(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}C_1(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \ -2x \ =$$
$$= \frac{C_1'(1 - x^2) + C_1 x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\frac{C_1'(1 - x^2) + C_1 x}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{C_1 x}{\sqrt{1 - x^2}} = 2;$$
$$C_1' = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad C_1 = \int \frac{2dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\arcsin x + \bar{C}_1.$$
$$p = \frac{2\arcsin x + \bar{C}_1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad y' = \frac{2\arcsin x + \bar{C}_1}{\sqrt{1 - x^2}},$$
$$y = \int \left(\frac{2\arcsin x + \bar{C}_1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx =$$
$$= \arcsin^2 x + 2\bar{C}_1 \arcsin x + C_2 =$$
$$= \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2.$$

Ответ: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$.

Задача 3.
Найти общее решение уравнения

$$2xy'''y'' = y'' - 1.$$

Указание

Сделайте замену:

$$y'' = p(x), \quad y''' = p'(x).$$

Решение

$$y''=p(x),\quad y'''=p'(x);$$

$$2xp'p=p^2-1,\quad \int\frac{2pdp}{p^2-1}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|p^2-1|=\ln|x|+\ln|C_1|,$$

$$p=\pm\sqrt{C_1x+1},\quad y''=\pm\sqrt{C_1x+1};$$

$$y'=\pm\int\sqrt{C_1x+1}dx=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}}+C_2;$$

$$y=\int\left(\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}}+C_2\right)dx=\pm\frac{4}{15C_1^2}(C_1x+1)^{\frac{5}{2}}+C_2x+C_3.$$

Ответ: $y=\pm\frac{4}{15C_1^2}(C_1x+1)^{\frac{5}{2}}+C_2x+C_3.$

Задача 4.
Решить задачу Коши:

$$yy''-y'^2=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$$

Указание

Сделайте замену:

$$y'=p(y),\quad y''=pp'.$$

Решение

Сделаем замену:

$$y'=p(y),\quad y''=pp'.$$

Тогда

$$ypp'-p^2=0,\quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y},\quad \ln|p|=\ln|y|+\ln|C|,$$

$$p=Cy,\quad p(0)=2,\quad y(0)=1\Rightarrow 2=C\cdot 1\Rightarrow C=2,$$

$$p=2y,\quad y'=2y,\quad \int\frac{dy}{y}=\int 2dx,$$

$$\ln|y|=2x+\ln|C|,\quad y=Ce^{2x},\quad y(0)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=Ce^0,\quad C=1,\quad y=e^{2x}.$$

Ответ: $y=e^{2x}$.

2.2.2 Линейная зависимость и независимость системы функций. Определитель Вронского, его свойства. Фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения. Общее решение однородного уравнения

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ называются **линейно зависимыми** на некотором отрезке $[a,b]$, если существуют такие числа α_1, α_2,…, α_n, хотя бы одно из которых не равно нулю, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \quad (1)$$

на рассматриваемом отрезке. Если же равенство (1) справедливо только при всех α_i=0, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ называются **линейно независимыми** на отрезке $[a,b]$.

Примеры.

1. Функции 1, x, x^2, …, x^n линейно независимы на любом отрезке, так как равенство

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

справедливо только при всех $\alpha_i = 0$. Иначе в левой части равенства стоял бы многочлен степени не выше n, который может обращаться в нуль не более, чем в n точках рассматриваемого отрезка.

2. Линейно независимой на любом отрезке является система функций

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}.$$

Если предположить, что эта система линейно зависима, то существуют такие числа α_1, α_2,…, α_n (пусть для определенности $\alpha_n \neq 0$), что

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \ldots + \alpha_n e^{k_n x} = 0.$$

Разделим полученное равенство на $e^{k_1 x}$ и продифференцируем:

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \ldots + \alpha_n (k_n - k_1) e^{(k_n - k_1)x} = 0.$$

Проделав эту операцию n-1 раз, придем к равенству

$$\alpha_n (k_2 - k_1)(k_3 - k_2)\ldots(k_n - k_{n-1}) e^{(k_n - k_{n-1})x} = 0,$$

что невозможно, так как по предположению

$$\alpha_n \neq 0, \quad k_i \neq k_j, \quad e^{(k_n - k_{n-1})x} \neq 0.$$

3. Подобным образом можно доказать линейную независимость системы функций

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \ldots, x^{n_1} e^{k_1 x},$$

$$e^{k_2 x}, x e^{k_2 x}, \ldots, x^{n_2} e^{k_2 x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e^{k_p x}, x e^{k_p x}, \ldots, x^{n_p} e^{k_p x}.$$

Определитель Вронского

Определитель вида

$$W(x)=W[y_1,y_2,...,y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_n'' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2)$$

называется **определителем Вронского** системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Теорема 1. Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то их определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.
Доказательство.
Дифференцируя n-1 раз тождество $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$, где не все $\alpha_i = 0$, получим линейную однородную систему относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0, \end{cases}$$

которая по условию должна иметь нетривиальное решение при любом x из отрезка $[a,b]$, а это возможно только в том случае, если главный определитель этой системы (см. правило Крамера) равен нулю. Поскольку этот главный определитель является определителем Вронского для выбранной системы функций, теорема доказана.

Теорема 2. Если линейно независимые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются решениями линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами, то определитель Вронского для этих функций не может обратиться в нуль ни в одной точке отрезка $[a,b]$.
Доказательство.
Пусть $\exists x_0 \in [a,b]$: $W(x_0)=0$. Выберем числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, так, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

(Определитель этой системы, неизвестными в которой считаем α_i, равен $W(x_0)$ и, следовательно, равен нулю, поэтому система имеет ненулевое решение). Тогда по условию теоремы

$$y=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x) \quad -$$

решение уравнения

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

с нулевыми начальными условиями

$$y(x_0)=y'(x_0)=\ldots=y^{(n-1)}(x_0)=0,$$

что следует из системы (3). Очевидно, что этим условиям удовлетворяет нулевое решение:

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0,$$

а по теореме существования и единственности это решение единственно. Но при этом из равенства (4) следует, что функции y_1, $y_2,\ldots,$ y_n линейно зависимы, что противоречит условиям теоремы. Следовательно, $W(x)\neq 0$ ни в одной точке отрезка $[a,b]$.

Замечание. В теореме 2 важно, что функции y_1, $y_2,\ldots,$ y_n – решения уравнения

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0.$$

Для произвольной системы функций утверждение теоремы не справедливо.

Теорема 3. Общим решением на $[a,b]$ уравнения

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

с непрерывными коэффициентами p_i является линейная комбинация

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i \qquad (5)$$

n линейно независимых на $[a,b]$ частных решений y_i с произвольными постоянными коэффициентами.

Доказательство.

Для доказательства теоремы с учетом теоремы существования и единственности достаточно показать, что можно подобрать постоянные c_i так, чтобы удовлетворялись произвольно заданные начальные условия:

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \quad (6)$$

где x_0 – произвольная точка отрезка $[a,b]$.

Подставив в равенства (6) выражение для y вида (5), получим линейную систему из n уравнений относительно неизвестных c_1, $c_2,\ldots,$ c_n:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}c_i y_i(x_0)=y_0, \\ \sum_{i=1}^{n}c_i y_i'(x_0)=y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n}c_i y_i^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases},$$

определителем которой является определитель Вронского для выбранных n линейно независимых решений рассматриваемого уравнения, который по теореме 2 не равен нулю. Следовательно, по правилу Крамера система имеет решение при любых правых частях. Теорема доказана.

Следствие. Максимальное число линейно независимых решений однородного уравнения

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

равно его порядку.

Любые n линейно независимых решений однородного линейного уравнения

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

называются его **фундаментальной системой решений**.

Таким образом, общее решение уравнения

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

является линейной комбинацией любой его фундаментальной системы решений.

Примеры решения задач

Задача 1.

Найти значения a, b и c, при которых функции ax^3+x+b и cx^2-x-1 линейно зависимы.

Указание

Условие линейной зависимости функций – существование чисел α_1 и α_2, из которых хотя бы одно не равно нулю, для которых верно равенство

$$\alpha_1(ax^3+x+b)+\alpha_2(cx^2-x-1)=0.$$

Решение

Пусть

$$\alpha_1(ax^3+x+b)+\alpha_2(cx^2-x-1)=0,$$

тогда

$$\alpha_1ax^3+\alpha_2cx^2+(\alpha_1-\alpha_2)x+(\alpha_1b-\alpha_2)=0.$$

Отсюда

$$\begin{cases}\alpha_1a=0\\ \alpha_2c=0\\ \alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_1b-\alpha_2=0\end{cases}.$$

Эта система имеет ненулевое решение для α_1 и α_2, если $a=c=0$, $b=1$.

При этом α_1 и α_2 – любые числа, удовлетворяющие условию $\alpha_1=\alpha_2$.

Ответ: $a = c = 0$, $b = 1$.

Задача 2.
Вычислить определитель Вронского для функций $x + \ln x$ и $x\ln x$ при $x = 1$.

Указание

Определитель Вронского для двух функций имеет вид

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}.$$

Решение

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + \ln x & x\ln x \\ 1 + \dfrac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix}.$$

При $x = 1$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 3.
Найти фундаментальную систему решений уравнения

$$y''' + y'' = 0.$$

Указание

Найдите общее решение уравнения и определите линейно независимые функции, линейной комбинацией которых оно является.

Решение

Пусть

$$y'' = p(x), \quad y''' = p'.$$

$$p' + p = 0, \quad \int \frac{dp}{p} = -\int dx, \quad \ln|p| = -x + \ln|C_1|,$$

$$y'' = C_1 e^{-x}, \quad y' = -C_1 e^{-x} + C_2, \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3.$$

Следовательно, любое решение уравнения является линейной комбинацией линейно независимых функций 1, x и e^{-x}, которые соответственно образуют фундаментальную систему решений.
Ответ: $1, x, e^{-x}$.

2.2.3. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Построение фундаментальной системы решений. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Частное и общее решения

Определим вид частных решений однородного линейного уравнения

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0, \quad (1)$$

в котором коэффициенты a_i постоянны. Можно показать, что они имеют вид $y=e^{kx}$, где k – постоянная. Действительно, при этом

$$y^{(p)}=k^pe^{kx},$$

и после подстановки в уравнение (1) получаем:

$$a_0k^ne^{kx}+a_1k^{n-1}e^{kx}+\ldots+a_ne^{kx}=0,$$

или, после сокращения на e^{kx},

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0 \quad - \quad (2)$$

так называемое **характеристическое уравнение** для уравнения (1). Числа k, являющиеся его решениями, при подстановке в функцию $y=e^{kx}$ дают частные решения уравнения (1). Исследуем различные возможности количества и вида решений характеристического уравнения.

1. Все корни уравнения (2) действительны и различны: $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Тогда они задают максимально возможное количество линейно независимых решений уравнения (1) (их линейная независимость показана в примере 2 предыдущей лекции), то есть определяют фундаментальную систему решений. Следовательно, в этом случае общее решение уравнения (1) может быть записано в виде:

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+\ldots+c_ne^{k_nx}.$$

Пример 1.

Общее решение уравнения

$$y^{(5)}-5y'''+4y'=0$$

можно найти, решив характеристическое уравнение

$$k^5-5k^3+4k=0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$k(k^2-4)(k^2-1)=0.$$

Следовательно, корни характеристического уравнения:

$$k_1=0, \quad k_2=-2, \quad k_3=2, \quad k_4=-1, \quad k_5=1.$$

Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-x}+c_5e^{x}.$$

2. Корни уравнения (2) различны, среди них есть комплексные. При этом, как было показано ранее, они образуют пары комплексно сопряженных чисел. При этом решения уравнения (1), соответствующие паре комплексно сопряженных решений уравнения (2)

$$k_1 = \alpha + \beta i \quad и \quad k_2 = \alpha - \beta i,$$

имеют вид

$$e^{(\alpha+\beta i)x} \quad и \quad e^{(\alpha-\beta i)x}$$

и могут быть заменены двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями указанных решений. Следовательно, так как

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

решениями уравнения (1) будут

$$\boxed{e^{\alpha x}\cos\beta x \quad и \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.}$$

Пример 2.

$$y'' - 6y' + 10 = 0, \quad k^2 - 6k + 10 = 0,$$

$$k_{1,2} = 3 \pm i, \quad y_1 = e^{3x}\cos x, \quad y_2 = e^{3x}\sin x,$$

$$y = e^{3x}(c_1\cos x + c_2\sin x).$$

3. Характеристическое уравнение имеет кратные корни. В этом случае число линейно независимых решений предыдущих типов меньше n, и для получения фундаментальной системы нужно найти дополнительные решения иного вида. Докажем, что при наличии у характеристического уравнения корня k_i кратности α_i такими решениями будут

$$xe^{k_i x}, \quad x^2 e^{k_i x}, \dots, x^{\alpha_i - 1}e^{k_i x}.$$

Предположим вначале, что выбранный кратный корень $k_i = 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-\alpha_i} k^{\alpha_i} = 0,$$

а соответствующее дифференциальное уравнение:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-\alpha_i} y^{(\alpha_i)} = 0..$$

Очевидно, что частными решениями такого уравнения будут функции

$$1, x, x^2, \dots, x^{\alpha_i - 1},$$

все производные которых порядка α_i и выше равны нулю. Кстати, линейная независимость такой системы функций показана в примере 1 предыдущей лекции.

Пусть теперь корень характеристического уравнения k_i кратности α_i не равен нулю. Сделаем замену переменной: $y = e^{k_i x}z$, тогда при подстановке в дифференциальное уравнение его линейность и однородность не нарушается, а коэффициенты изменяются, но по-прежнему остаются постоянными:

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \ldots + b_n z = 0.$$

При этом корни характеристического уравнения

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_n p = 0 \quad (3)$$

отличаются от корней уравнения

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

на слагаемое $-k_i$, так как при

$$z = e^{px} \quad y = e^{k_i x} z = e^{(k_i + p)x},$$

то есть $k = k_i + p$. Следовательно, уравнение (3) имеет корень $p = 0$ кратности α_i , которому соответствуют линейно независимые частные решения

$$z = 1, z = x, \ldots, z = x^{\alpha_i - 1}.$$

При обратной замене получаем набор линейно независимых решений исходного уравнения:

$$\boxed{y = e^{k_i x}, \quad y = x e^{k_i x}, \ldots, y = x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}. \quad (4)}$$

Таким образом, каждый кратный корень уравнения (2) задает серию линейно независимых частных решений уравнения (1), количество которых равно его кратности. Следовательно, вновь построена фундаментальная система решений.

Замечание. Кратные комплексно сопряженные корни задают частные решения вида

$$\boxed{x^i e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x^i e^{\alpha x} \sin \beta x.}$$

Пример 3.

Характеристическое уравнение для уравнения

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

имеет вид $(k + 1)^3 = 0$, то есть $k = -1$ – корень кратности 3. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из функций

$$e^{-x}, x e^{-x}, x^2 e^{-x},$$

а общее решение можно записать в виде

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x}.$$

Пример 4.

Для уравнения

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$

характеристическим уравнением является

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0,$$

то есть $(k^2+4)^2 = 0$. Следовательно,

$$k = \pm 2i \quad -$$

корни кратности 2. Тогда общим решением исходного дифференциального уравнения является

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos 2x + (c_3 + c_4 x)\sin 2x.$$

Линейные неоднородные уравнения

Ранее было показано, что сумма решений линейного неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ и соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением неоднородного уравнения. Используя это свойство, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Общее решение на отрезке $[a,b]$ уравнения $L[y] = f(x)$ с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами $p_i(x)$ и правой частью $f(x)$ равно сумме общего решения $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Доказательство.

Требуется доказать, что для любых начальных условий

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

можно подобрать такие значения постоянных c_i, чтобы функция

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + \tilde{y}, \quad (5)$$

где y_i – линейно независимые частные решения однородного уравнения $L[y] = 0$, а $\tilde{y}$ - частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения, была решением этого неоднородного уравнения с заданными начальными условиями. Это требование приводит нас к системе уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) + \tilde{y}(x_0) = y_0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) + \tilde{y}'(x_0) = y_0', \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i''(x_0) + \tilde{y}''(x_0) = y_0'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) + \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}, \quad (6)$$

главным определителем которой является определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, как известно, не равный нулю. Поэтому система (6) имеет единственное решение, что и доказывает утверждение теоремы.

Замечание. Таким образом, при найденном общем решении однородного уравнения решение неоднородного уравнения сводится к подбору его частного решения.

Методы нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения

Метод вариации произвольных постоянных

Распространим метод вариации произвольных постоянных, рассмотренный ранее для решения линейного уравнения первого порядка, на линейные уравнения высших порядков. Будем искать решение неоднородного уравнения в виде

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i.$$

При этом требуется найти n неизвестных функций $c_1(x)$, $c_2(x),\ldots,$ $c_n(x)$, которые удовлетворяли бы только одному уравнению

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=f(x). \quad (7)$$

Поэтому можно дополнительно потребовать, чтобы искомые функции удовлетворяли еще каким-нибудь n-1 уравнениям, выбранным так, чтобы производные функции

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i$$

имели по возможности такой же вид, как при постоянных c_i. Первая производная решения имеет вид:

$$y'=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i'(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i(x).$$

Потребуем, чтобы вторая сумма в этом выражении равнялась нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i(x)=0,$$

тогда

$$y'=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i'(x).$$

Зададим такое же условие для второй производной:

$$y''=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i''(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i'(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i'(x)=0, \quad y''=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i''(x).$$

Продолжая вычислять производные функции

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i$$

до порядка n – 1 включительно и требуя каждый раз, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(k)}(x) = 0,$$

получим:

$$\begin{cases} y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i \\ y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i' \\ y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'' \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-1)} \\ y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)} \end{cases} \qquad (8)$$

(в последнем равенстве уже нельзя потребовать, чтобы вторая сумма равнялась нулю, так как на искомые функции уже наложено n – 1 условие, а последним требованием является то, что эти функции должны удовлетворять уравнению (7)). Подставив

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$$

с учетом (8) в (7), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i (y_i^{(n)} + p_1(x) y_i^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_i) = f(x),$$

но y_i – частные решения однородного уравнения, следовательно, все слагаемые второй суммы равны нулю и уравнение сводится к следующему:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = f(x). \quad (9)$$

Добавив его к первым n – 1 уравнениям системы (8), получим систему из n уравнений для определения c_1', c_2',..., c_n', определитель которой является определителем Вронского для функций y_1, y_2,..., y_n и, следовательно, не равен нулю. Следовательно, из этой системы можно единственным образом найти производные искомых функций, а затем с помощью интегрирования и сами функции c_1, c_2,..., c_n.

Пример 5.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Найдем решение однородного уравнения, для чего составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $y = (c_1 + c_2 x)e^x$, то есть фундаментальную систему решений составляют функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = xe^x$. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде $y = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$. Составим систему (8):

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0 \\ c_1' e^x + c_2'(1+x)e^x = \dfrac{e^x}{x}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \\ c_1' + c_2'(1+x) = \dfrac{1}{x}, \end{cases} \quad c_2' = \frac{1}{x}, c_2 = \ln|x| + C_2,$$

$$c_1' = -1, c_1 = -x + C_1,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Таким образом, найдено общее решение исходного уравнения: $y = e^x(x\ln|x| - x + C_1x + C_2)$.

Подбор частного решения для неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

Для некоторых видов правой части линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (10)$$

можно подобрать частное решение в виде функции с неопределенными коэффициентами, которые определяются путем подстановки этой функции в уравнение (10).

1. $f(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s \quad (a_n \neq 0).$

При этом существует частное решение уравнения (10), имеющее такой же вид:

$$\boxed{y = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s.}$$

Действительно, подставив эту функцию в уравнение (10) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим разрешимую единственным образом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_n B_0 = A_0 \\ a_n B_1 + s a_{n-1} B_0 = A_1 \\ a_n B_2 + (s-1)a_{n-1}B_1 + s(s-1)a_{n-2}B_0 = A_2 \,.. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n B_s + \ldots = A_s \end{cases}$$

Пример 6.

$$y'' + 3y' + 2y = 3x - 5.$$
Будем искать частное решение в виде $y = Ax + B$, тогда
$$y' = A, \quad y'' = 0,$$
и после подстановки в уравнение получим: $3A + 2Ax + 2B = 3x - 5$. Тогда $2A = 3$, $3A + 2B = = -5$. Следовательно,
$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -\frac{19}{4},$$
и общее решение уравнения можно записать в виде:
$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{19}{4}.$$
2. Если
$$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\alpha+1} = 0, \quad a_{n-\alpha} \neq 0$$
(то есть $k = 0$ является α – кратным корнем характеристического уравнения), то частное решение имеет вид:

$$\boxed{y = x^{\alpha}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s).}$$

Легко убедиться, что функция подобного вида является решением уравнения (10) при поставленных условиях.

Пример 7.
$$y''' - 3y'' = 2x^2 + 5.$$
Пусть
$$y_{частн} = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$
$$y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \quad y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$
$$y''' = 24Ax + 6B.$$
Подставляя в уравнение, получим:
$$24Ax + 6B - 36Ax^2 - 18Bx - 6C = 2x^2 + 5,$$
откуда $-36A = 2$, $24A - 18B = 0$, $6B - 6C = 5$. Решая эту систему, получаем
$$A = -\frac{1}{18}, \quad B = -\frac{2}{27}, \quad C = -\frac{49}{54}.$$
Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:
$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{3x} - \frac{1}{18}x^4 - \frac{2}{27}x^3 - \frac{49}{54}x^2.$$
3. $f(x) = e^{px}(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s).$

Если число p при этом не является корнем характеристического уравнения, можно задать частное решение в виде:

$$\boxed{y = e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s).}$$

Если же p – корень характеристического уравнения кратности α, частное решение имеет вид:

$$y = x^{\alpha} e^{px} (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s).$$

В обоих случаях с помощью подстановки в исходное уравнение можно убедиться, что выбранные функции являются его решениями.

Пример 8.

$$y'' + y' - 2y = xe^{-x}.$$

Найдя корни характеристического уравнения $k^2 + k - 2 = 0$: $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, видим, что $p = -1$ не является корнем этого уравнения. Поэтому будем искать частное решение в форме $y = e^{-x}(Ax + B)$. При этом

$$y' = e^{-x}(-Ax - B + A), \quad y'' = e^{-x}(Ax - 2A + B)..$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$e^{-x}(-2Ax - A - 2B) = xe^{-x},$$

откуда $-2A = 1$, $-A - 2B = 0$, то есть

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{4}.$$

Итак, общее решение уравнения:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{e^{-x}}{4}(1 - 2x).$$

Пример 9.

$$y'' - 2y' + y = 2e^x.$$

Здесь $p = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 2, поэтому частное решение имеет вид

$$y = Ax^2 e^x, \quad y' = Ae^x (x^2 + 2x),$$

$$y'' = Ae^x (x^2 + 4x + 2).$$

Подстановка в уравнение дает $2Ae^x = 2e^x$, откуда $A = 1$, а общее решение:

$$y = (c_1 + c_2 x + x^2)e^x.$$

4. В аналогичной форме задаются частные решения в случае, когда правая часть уравнения (7) имеет вид

$$f(x) = e^{px}(P(x)\cos qx + Q(x)\sin qx),$$

где P и Q – некоторые многочлены:

а) если $p \pm qi$ - не корни характеристического уравнения, то можно подобрать частное решение в виде

$$y = e^{px}(\tilde{P}_m(x)\cos qx + \tilde{Q}_m(x)\sin qx),$$

где $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами, степень m которых есть старшая из степеней многочленов P и Q.

б) если $p \pm qi$ - корни характеристического уравнения кратности α, то

$$y = x^{\alpha} e^{px}(\tilde{P}_m(x)\cos qx + \tilde{Q}_m(x)\sin qx).$$

Пример 10.

$$y^{(4)} + 2y'' + y = x\cos x..$$

При этом $\pm i$ - корни характеристического уравнения кратности 2, поэтому следует искать частное решение в виде:

$$y = x^2((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x).$$

5. Если правая часть уравнения (7) представляет собой сумму функций, рассмотренных в предыдущих пунктах, то по принципу суперпозиции частное решение будет задаваться как сумма решений, соответствующих каждому из слагаемых правой части.

Пример 11.

Для уравнения

$$y''' - 4y'' + y' - 4 = x^3 e^x + \sin x$$

частное решение ищем в виде:

$$y = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^x + x(E\cos x + F\sin x).$$

Примеры решения задач

Задача 1.

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' - 6y = 0.$$

Указание

Составьте и решите характеристическое уравнение.

Решение

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 5k - 6 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, \quad k_2 = 6.$$

Корни характеристического уравнения действительны и различны, поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$.

Задача 2.

Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)}+y'''=0.$$

Указание

Составьте и решите характеристическое уравнение.

Решение

Характеристическое уравнение:

$$k^5+k^3=0,\quad k^3(k^2+1)=0\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,$$

$$k_{4,5}=\pm i.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет один действительный корень кратности 3 и пару комплексно сопряженных корней с нулевой действительной частью. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos x+C_5\sin x.$$

Ответ: $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos x+C_5\sin x.$

Задача 3.

Найти общее решение уравнения

$$y''+4y'+4y=4x-1.$$

Указание

Поскольку k = 0 не является корнем характеристического уравнения, частное решение имеет вид:

$$y_{частн}=Ax+B.$$

Решение

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$k^2+4k+4=0\Rightarrow k_1=k_2=-2;$$

$$y_{одн}=(C_1+C_2x)e^{-x}.$$

Поскольку k = 0 не является корнем характеристического уравнения, частное решение имеет вид:

$$y_{частн}=Ax+B,\quad y'=A,\quad y''=0.$$

Подставив эти выражения в неоднородное уравнение, получим:

$$4A+4Ax+4B=4x-1,\quad 4Ax+(4A+4B)=4x-1,$$

$$\begin{cases}4A=4\\4A+4B=-1\end{cases}\Rightarrow A=1,\quad B=-\frac{5}{4},$$

$$y_{частн}=x-\frac{5}{4}.$$

Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+x-\frac{5}{4}.$$

Ответ: $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+x-\frac{5}{4}.$

Задача 4.

Найти общее решение уравнения

$$y''+4y'+5y=3\cos 2x.$$

Указание

Поскольку k = $\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение имеет вид:

$$y_{частн}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Решение

Найдем общее решение однородного уравнения:

$$k^2+4k+5=0 \Rightarrow k_{1,2}=-2\pm i,$$

$$y_{одн}=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

$$y_{частн}=A\cos 2x+B\sin 2x,$$

$$y'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,$$

$$y''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-8A\sin 2x+8B\cos 2x+$$

$$+5A\cos 2x+5B\sin 2x=3\cos 2x,$$

$$(A+8B)\cos 2x+(B-8A)\sin 2x=3\cos 2x,$$

$$\begin{cases}A+8B=3\\ B-8A=0\end{cases}\Rightarrow A=\frac{3}{65},\quad B=\frac{24}{65},$$

$$y_{частн}=\frac{3}{65}\cos 2x+\frac{24}{65}\sin 2x,$$

$$y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{3}{65}\cos 2x+\frac{24}{65}\sin 2x.$$

Ответ: $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{3}{65}\cos 2x+\frac{24}{65}\sin 2x.$

Задача 5.

Найти общее решение уравнения

$$y''+y'-2y=3e^x.$$

Указание

Поскольку $k = 1$ – корень характеристического уравнения, частное решение имеет вид:

$$y_{частн} = Axe^x.$$

Решение

$$k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -2, \quad k_2 = 1.$$

$$y_{одн} = C_1e^{-2x} + C_2e^x;$$

$$y_{частн} = Axe^x, \quad y' = (A + Ax)e^x, \quad y'' = (2A + Ax)e^x;$$

$$(2A + Ax)e^x + (A + Ax)e^x - 2Axe^x = 3e^x,$$

$$3Ae^x = 3e^x, \quad A = 1, \quad y_{частн} = xe^x,$$

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + xe^x.$$

Ответ: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + xe^x.$

Задача 6.

Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Указание

Найдите решение однородного уравнения и примените метод вариации постоянных.

Решение

Найдем решение однородного уравнения:

$$k^2 - k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 1,$$

$$y_{одн} = C_1e^x + C_2.$$

Будем искать решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{неодн} = C_1(x)e^x + C_2(x).$$

Составим и решим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2' = 0 \\ C_1'e^x = \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{cases} \Rightarrow C_1' = \frac{1}{e^x+1}, \quad C_1 = \int \frac{dx}{e^x+1} =$$

$$= \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} \overset{t=e^x}{=} \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= \ln t - \ln(t+1) + \bar{C}_1 = \ln e^x - \ln(e^x+1) + \bar{C}_1 =$$

$$= x - \ln(e^x+1) + \bar{C}_1;$$

$$C_2' = -C_1'e^x = -\frac{e^x}{e^x+1}, \quad C_2 = -\int \frac{e^x}{e^x+1} dx =$$

$$= -\ln(e^x+1) + \bar{C}_2.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = (x - \ln(e^x+1) + C_1)e^x - \ln(e^x+1) + C_2 =$$

$$= e^x(x + C_1) - (e^x+1)\ln(e^x+1) + C_2.$$

Ответ: $y = e^x(x + C_1) - (e^x+1)\ln(e^x+1) + C_2.$

2.2.5. Устойчивость решений дифференциальных уравнений и их систем. Определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Автономные системы дифференциальных уравнений. Фазовое пространство (плоскость), фазовая траектория. Точки покоя. Классификация точек покоя системы двух однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Условия устойчивости точки покоя

Поскольку при решении реальных задач с помощью дифференциальных уравнений начальные условия обычно являются результатами измерений и, следовательно, получены с некоторой погрешностью, очень важным является вопрос о том, как изменится решение уравнения при малом изменении начальных условий. В частности, если такие изменения существенно меняют решение, то подобное решение, очевидно, не имеет практической ценности.

Пусть некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), \quad i = 1, 2, ..., n \quad (1)$$

с начальными условиями $y_i(t_0) = y_{i0}$.

Решение $\varphi_i(t)$ ($i = 1,2,\ldots,n$) называется **устойчивым по Ляпунову**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ такое, что для всякого решения $y_i(t)$ той же системы, начальные условия которого удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(t_0)-\varphi_i(t_0)|<\delta(\varepsilon),$$

для всех $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$|y_i(t)-\varphi_i(t)|<\varepsilon \qquad (2)$$

(то есть близкие по значениям решения остаются близкими для всех $t \geq t_0$).
Если хотя бы для одного решения $y_i(t)$ неравенства (2) не выполняются, решение $\varphi_i(t)$ называется **неустойчивым**.

Если решение $\varphi_i(t)$ не только устойчиво по Ляпунову, но и удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty}|y_i(t)-\varphi_i(t)|=0 \quad (3)$$

при

$$|y_i(t_0)-\varphi_i(t_0)|<\delta_1, \quad \delta_1>0,$$

то это решение называется **асимптотически устойчивым**.
Замечание. Одно условие (3) не обеспечивает устойчивость решения.

Фазовая плоскость

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f(t,y,\frac{dy}{dt}) \quad (4)$$

равносильно системе уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt}=f(t,y,\dot{y}). \quad (5)$$

Геометрически общее решение уравнения (4) или системы (5) можно представить семейством **фазовых траекторий** на **фазовой плоскости** $Oy\dot{y}$. Особенно удобно такое представление в случае, когда функция $f(t,y,\dot{y})$ не содержит явным образом независимого переменного t. Тогда система (5) имеет вид

$$\frac{dy}{dt}=P(y,\dot{y}), \quad \frac{d\dot{y}}{dt}=Q(y,\dot{y}) \quad (6)$$

и называется **автономной системой**. Фазовые траектории в этом случае удовлетворяют дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\dot{y}}{dy}=\frac{Q(y,\dot{y})}{P(y,\dot{y})}, \qquad (7)$$

которое каждой точке ставит в соответствие наклон проходящей через нее интегральной кривой.

Точки покоя

Точка $(y,\dot{y})$ фазовой плоскости системы (6) называется **обыкновенной точкой**, если $P(y,\dot{y})$ *и* $Q(y,\dot{y})$ дифференцируемы и не обращаются одновременно в нуль; через каждую обыкновенную точку проходит одна фазовая траектория. Точка $(y_0, \dot{y}_0)$ называется **особой точкой**, если

$$P(y_0, \dot{y}_0) = 0 \quad и \quad Q(y_0, \dot{y}_0) = 0.$$

Замечание. Особые точки классифицируются по характеру фазовых траекторий в их окрестности.

Исследование на устойчивость некоторого решения

$$y_i = \overline{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

системы (1) можно свести к исследованию тривиального решения – **точки покоя**, расположенной в начале координат, преобразуя систему к новым переменным: $x_i = y_i - \overline{y}_i(t)$ – отклонениям прежних неизвестных от решения, исследуемого на устойчивость. В новых переменных система (1) принимает вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\overline{y}_i}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \overline{y}_1(t), x_2 + \overline{y}_1(t), \ldots, x_n + \overline{y}_n(t)), \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Простейшие типы точек покоя

Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя $x = 0$, $y = 0$ системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \quad где \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Характеристическое уравнение при этом имеет вид:

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0.$$

Рассмотрим различные наборы корней этого уравнения:

1) k_1 и k_2 действительны и различны. Тогда общее решение системы (9) можно задать так:

$$\begin{cases} x = c_1\alpha_1 e^{k_1 t} + c_2\beta_1 e^{k_2 t} \\ y = c_1\alpha_2 e^{k_1 t} + c_2\beta_2 e^{k_2 t} \end{cases}.$$

При этом возможны следующие случаи:

а) если $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$, то точка покоя асимптотически устойчива, так как $\lim\limits_{t\to\infty} e^{k_{1,2}t} = 0,$ и все точки, находящиеся в начальный момент $t = t_0$ в любой δ – окрестности начала координат, при достаточно большом t переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой ε – окрестности начала координат, а при $t \to \infty$ стремятся к началу координат. Такая точка покоя называется **устойчивым узлом** (рис. 1).

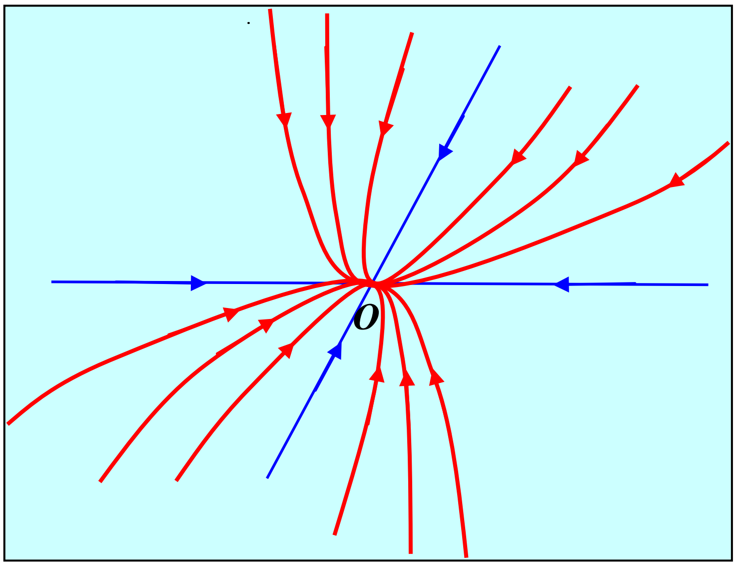


Рис. 1

б) если $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, можно свести исследование к предыдущему случаю заменой t на $-t$. При этом фазовые траектории имеют такой же вид, но направление движения меняется на противоположное, то есть при увеличении t точка удаляется от начала координат, поэтому подобная точка покоя – **неустойчивый узел** – неустойчива по Ляпунову (рис. 2).

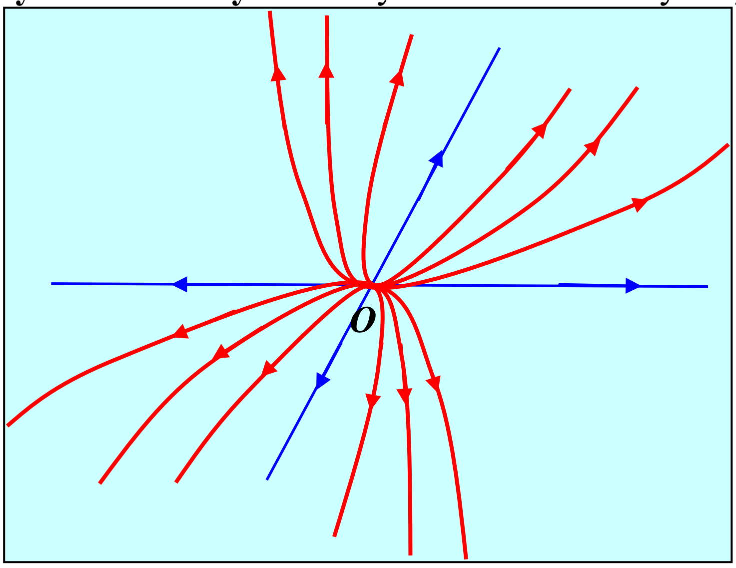


Рис. 2

в) при $k_1 > 0$, $k_2 < 0$ точка покоя тоже неустойчива, так как движущаяся по траектории

$$x = c_1\alpha_1 e^{k_1 t}, \quad y = c_1\alpha_2 e^{k_1 t}$$

точка с возрастанием t выходит из ε – окрестности начала координат. Точка покоя рассматриваемого типа называется **седлом** (рис. 3).

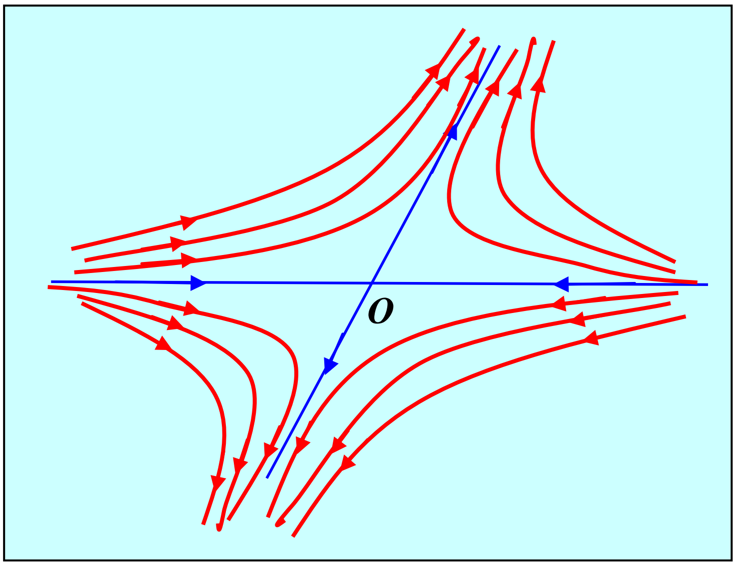


Рис. 3

2) $k_{1,2} = p \pm qi$. Тогда общее решение системы (9) можно представить в виде

$$\begin{cases} x = e^{pt}(c_1 \cos qt + c_2 \sin qt) \\ y = e^{pt}(\tilde{c}_1 \cos qt + \tilde{c}_2 \sin qt)' \end{cases}$$

где $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ – линейные комбинации произвольных постоянных c_1, c_2. При этом возможны следующие случаи:

а) $p < 0$, $q \neq 0$. Тогда $e^{pt} \to 0$ при $t \to \infty$, а тригонометрические функции являются ограниченными. Поэтому фазовые траектории являются спиралями, асимптотически приближающимися при $t \to \infty$ к началу координат. Таким образом, точка покоя асимптотически устойчива. Она называется **устойчивым фокусом** (рис. 4).

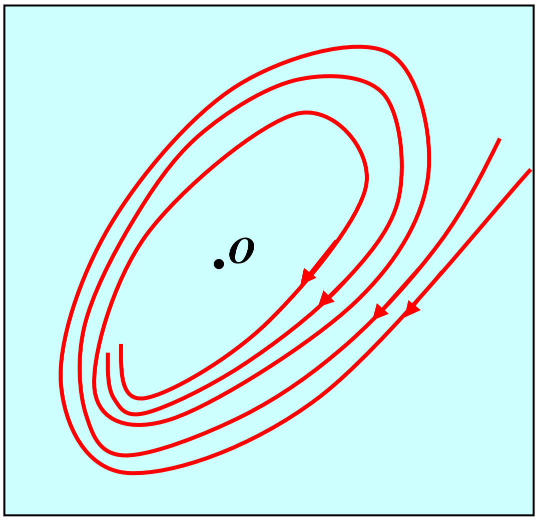


Рис. 4

б) $p > 0$, $q \neq 0$. Изменяется направление движения по фазовым траекториям, следовательно, точки удаляются от начала координат и точка покоя неустойчива – **неустойчивый фокус** (рис. 5).

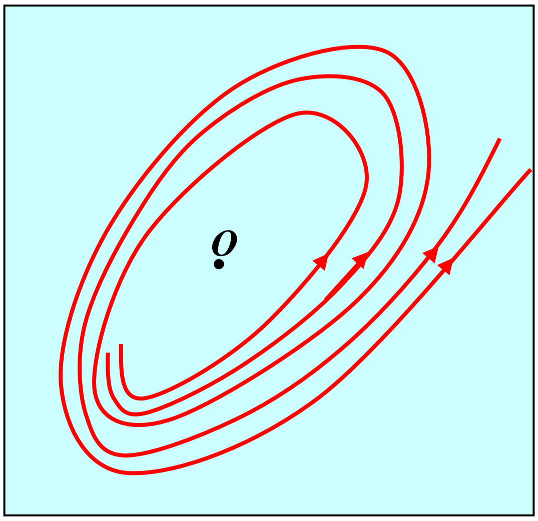


Рис. 5

в) $p = 0$. Траекториями являются замкнутые кривые, окружающие точку покоя, называемую в этом случае **центром** (рис. 6). Такая точка покоя устойчива, так как можно подобрать такое δ, что замкнутые траектории, начальные точки которых лежат в δ – окрестности начала координат, не выходят за пределы ε – окрестности начала координат ($x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2$).

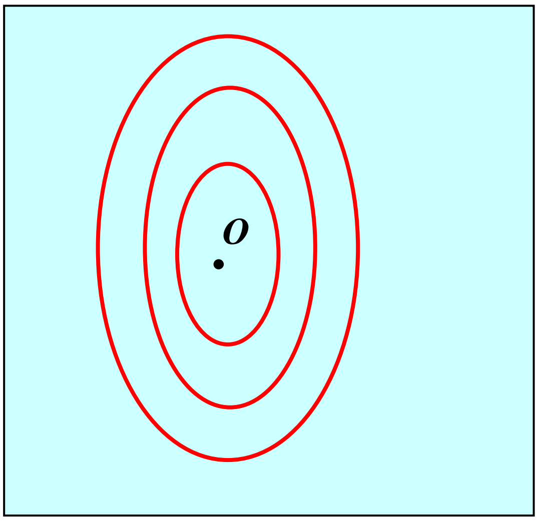


Рис. 6

3) Корни кратны: $k_1 = k_2$.

а) $k_1 = k_2 < 0$. Тогда общее решение

$$\begin{cases} x(t) = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_2 t)e^{k_1 t} \\ y(t) = (c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 t)e^{k_1 t} \end{cases}$$

стремится к нулю при $t \to \infty$, и точка покоя вновь называется **устойчивым узлом** (рис. 7).

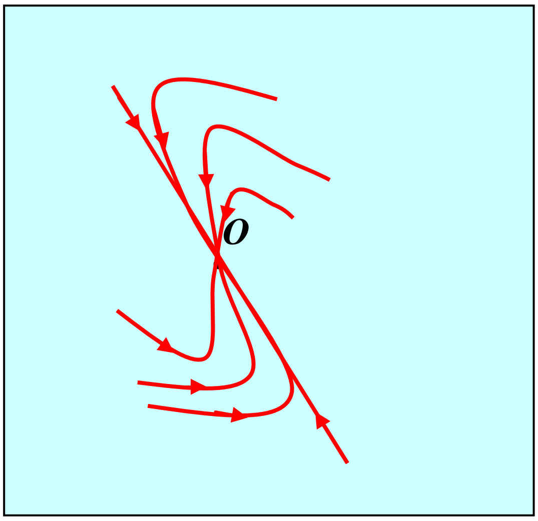


Рис. 7

При $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем частный случай устойчивого узла – так называемый **дикритический узел** (рис. 8).

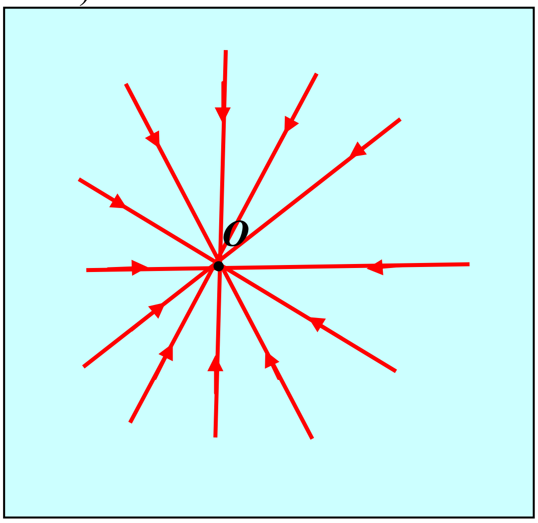
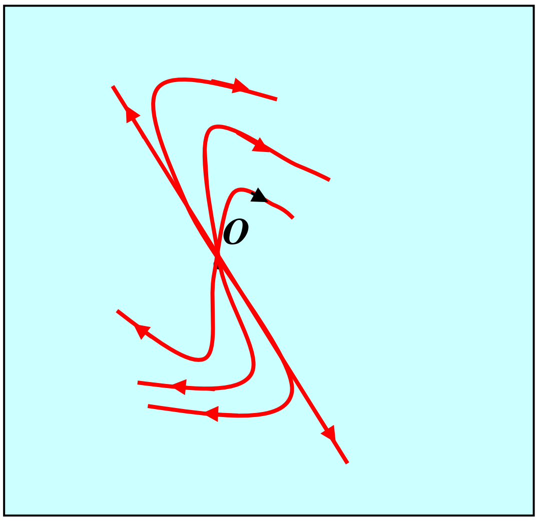


Рис. 8

б) $k_1 = k_2 > 0$. Направление движения по траекториям меняется – **неустойчивый узел** (рис. 9).



Примеры решения задач

Задача 1.
Определить тип точки покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 4y \end{cases}.$$

1) устойчивый узел 2)! неустойчивый узел 3) седло
4) устойчивый фокус 5) неустойчивый фокус

Указание

Исследуйте вид корней характеристического уравнения.

Решение

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 4-k & -3 \\ -3 & 4-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k_1 = 1, \quad k_2 = 7.$$

Корни характеристического уравнения действительны, различны и положительны, следовательно, точка покоя – неустойчивый узел.
Ответ: неустойчивый узел.

Задача 2.
Определить тип точки покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y \end{cases}.$$

1) устойчивый узел 2) неустойчивый узел 3)! седло
4) устойчивый фокус 5) неустойчивый фокус

Указание

Исследуйте вид корней характеристического уравнения.

Решение

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ -4 & -2-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k_1 = -1, \quad k_2 = 2.$$

Корни характеристического уравнения действительны, различны и имеют разные знаки, следовательно, точка покоя – седло.
Ответ: седло.

Задача 3.
Определить тип точки покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}.$$

1) устойчивый узел 2) неустойчивый узел 3) седло
4) устойчивый фокус 5)! неустойчивый фокус

Указание

Исследуйте вид корней характеристического уравнения.

Решение

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -4 \\ 4 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1 \pm 4i.$$

Корни характеристического уравнения комплексны, причем их действительная часть положительна. Следовательно, точка покоя – неустойчивый фокус.
Ответ: неустойчивый фокус.

Задача 4.
Определить тип точки покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases}.$$

1)! устойчивый узел 2) неустойчивый узел 3) седло
4) устойчивый фокус 5) неустойчивый фокус

Указание

Исследуйте вид корней характеристического уравнения.

Решение

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} -2-k & -1 \\ 1 & -4-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -3.$$

Корни характеристического уравнения действительны, кратны и отрицательны. Следовательно, точка покоя – устойчивый узел.
Ответ: устойчивый узел.