МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Составители: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2019

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математика»/ Ю.Б. Егорова, И.М. Мамонов. М.: МАИ, 2019. – 25 с.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, содержащее неизвестную (искомую) функцию *y(x)*, независимую переменную *x* и первую производную y' или дифференциалы первого порядка dx и dy.

Если искомая функция является функцией одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**. Если независимых переменных несколько, то дифференциальное уравнение называется **уравнением в частных производных**. **Порядком** дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка символически можно записать в общем виде следующим образом:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно первой производной, имеет вид:

$$y' = f(x, y).$$

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения является **интегрирование.**

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает его в тождество. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесчисленное множество решений, которые можно представить в виде функции $y = \varphi(x, C)$. Эта совокупность решений называется **общим решением**.

Функция, получающаяся из общего решения при конкретном значении постоянной C, называется **частным решением**. Частное решение находится при помощи задания начальных условий: $y(x=x_0)=y_0$, где x_0, y_0– конкретные числа.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию, называется **задачей Коши**. Практически задачу Коши решают следующим образом: находят общее решение, затем в него подставляют начальные условия, определяют конкретное значение произвольной постоянной C и подставляют его в общее решение.

2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Дифференциальное уравнение с разделенными переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными имеет вид:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \qquad (2.1.1)$$

где $M(x)$ и $N(y)$ – некоторые функции от x и y соответственно. Интегрируя уравнение (2.1.1), получим общее решение:

$$\int N(y)dy = -\int M(x)dx,$$

$$y = \varphi(x, C).$$

Пример 1. Найти частное решение уравнения $xdx + ydy = 0$ при заданном начальном условии $y(x=0)=1$.

Решение. Интегрируя, получаем сначала общее решение:

$$\int y dy = -\int x dx, \tag{2.1.2}$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2} \quad \text{или} \quad y^2 = -x^2 + C. \tag{2.1.3}$$

Общее решение можно представит в виде:

$$x^2 + y^2 = C. \tag{2.1.4}$$

Общее решение (2.1.4) – это уравнение окружностей с центром в начале координат и радиусами $R = \sqrt{C}$.

Найдем частное решение. Для этого подставим сначала начальные условия в общее решение (2.1.4) и определим C:

$$0^2 + 1^2 = C, \quad C = 1.$$

Тогда частное решение имеет вид:

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2.1.5}$$

Частное решение (2.1.5) – это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 1$.

2.2. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

2.2.1. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида:

$$y' = \frac{M(x)}{N(y)} \tag{2.2.1}$$

$$\text{или} \quad y' = \frac{N(y)}{M(x)}.$$

Представим сначала уравнение (2.2.1) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение:

$$\int N(y)dy = \int M(x)dx,$$

$$y = \varphi(x, C).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y' = \dfrac{y}{x}$.

Решение. Представим исходное уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C = \ln|Cx|,$$

$$y = Cx.$$

2.2.2. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \qquad (2.2.2)$$

Представим сначала уравнение (2.2.2) в виде:

$$M_2(x)N_2(y)dy = -M_1(x)N_1(x)dx.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение:

$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx,$$

$$y = \varphi(x, C).$$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $ydx + xdy = 0$ при заданных начальных условиях $y(x=1)=1$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду:

$$xdy = -ydx.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,$$

$$y = \frac{C}{x}.$$

Найдем частное решение. Для этого подставим сначала начальные условия в общее решение и определим C:

$$1 = \frac{C}{1}, \qquad C = 1.$$

Тогда частное решение при заданных начальных условиях имеет вид:

$$y = \frac{1}{x}.$$

2.3. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

2.3.1. Однородное дифференциальное уравнение вида:

$$y' = f(x, y) \qquad (2.3.1)$$

Дифференциальное уравнение (2.3.1) называется **однородным**, если функция $f(x,y)$ является однородной функцией нулевого измерения.

Функция $f(x,y)$ называется **однородной функцией нулевого измерения**, если выполняется тождество:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y),$$

где λ – константа.

Для решения однородного дифференциального уравнения применяют подстановку:

$$u=\frac{y}{x};\qquad y=xu;\qquad y'=u'x+u, \tag{2.3.2}$$

где u – функция от x. Подставив соотношения (2.3.2) в исходное уравнение (2.3.1), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x+u=f(u). \tag{2.3.3}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение.

Пример 4. Найти общее решение уравнения:

$$y'=\frac{y-x}{x}. \tag{2.3.4}$$

Решение. Уравнение (2.3.4) является однородным, так как функция $f(x,y)=\dfrac{y-x}{x}$ является однородной функцией нулевого измерения:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda y-\lambda x}{\lambda x}=\frac{y-x}{x}=f(x,y);$$

Представим исходное уравнение (2.3.4) в виде:

$$y'=\frac{y}{x}-1.$$

Сделав подстановку (2.3.2), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x+u=u-1.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{dx}x=-1,$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x},$$

$$u = -\ln|x| + \ln C = \ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Сделав обратную замену, получим общее решение:

$$\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \quad \text{или} \quad y = x\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

2.3.2. Однородное дифференциальное уравнение вида:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (2.3.5)$$

Дифференциальное уравнение (2.3.5) называется однородным, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного n-го измерения.

Функция $f(x,y)$ называется **однородной функцией *n*-го измерения**, если выполняется тождество:

$$f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n f(x,y),$$

где λ – константа.

Для решения однородного дифференциального уравнения (2.3.5) применяют подстановку:

$$u = \frac{y}{x}; \qquad y = xu; \qquad dy = xdu + udx. \qquad (2.3.6)$$

Подставив соотношения (2.3.6) в исходное уравнение (2.3.5), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$P(x,ux)dx + Q(x,ux)(xdu + udx) = 0. \qquad (2.3.7)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение.

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$(x^2+y^2)dx-2x^2dy=0. \tag{2.3.8}$$

Решение. Уравнение (2.3.8) является однородным, так как функции $P(x,y)=x^2+y^2$ и $Q(x,y)=-2x^2$ являются однородными функциями второго измерения:

$$P(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda y)^2=\lambda^2(x^2+y^2)=\lambda^2 P(x,y);$$

$$Q(\lambda x,\lambda y)=-2(\lambda x)^2=\lambda^2(-2x^2)=\lambda^2 Q(x,y).$$

Сделаем подстановку (2.3.6), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$(x^2+x^2u^2)dx-2x^2(xdu+udx)=0.$$

Сократим уравнение на x^2 и преобразуем:

$$(1+u^2)dx-2(xdu+udx)=0;$$

$$(1-2u+u^2)dx-2xdu=0;$$

$$(u-1)^2dx-2xdu=0;$$

$$2xdu=(u-1)^2dx.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int\frac{du}{(u-1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u-1}=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln C.$$

Подставим y/x вместо u и преобразуем общее решение:

$$-\frac{2}{\frac{y}{x}-1}=\ln|Cx| \text{ или } \frac{2x}{x-y}=\ln|Cx|.$$

2.4. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (2.4.1)$$

где функция *Q(x)* называется правой частью линейного уравнения. Искомая функция *y* и ее производная входят в уравнение в виде линейной комбинации.

Если правая часть *Q(x)*=0, то уравнение (2.4.1) называется **линейным однородным или линейным уравнением без правой части**:

$$y' + P(x)y = 0. \qquad (2.4.2)$$

Уравнение (2.4.2) решается путем разделения переменных.

Если правая часть *Q(x)*≠0, то уравнение (2.4.1) называется **линейным неоднородным или линейным уравнением с правой частью.** Для решения уравнения этого типа существует несколько способов: метод Бернулли, метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных) и др.

2.4.1. Метод Бернулли

Для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения применяют подстановку:

$$y = uv; \qquad y' = u'v + v'u, \qquad (2.4.3)$$

где u и v – функции от x.

Подставим соотношения (2.4.3) в исходное уравнение (2.4.1):

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x).$$

Вынесем u за скобку:

$$u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x). \qquad (2.4.4)$$

Выражение в скобке приравняем к нулю:

$$v' + P(x)v = 0. \qquad (2.4.5)$$

Соотношение (2.4.5) является линейным однородным дифференциальным уравнением, которое решается путем разделения переменных:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx,$$

$$\ln|v| = \varphi(x), \quad v = e^{\varphi(x)} \text{ (принимаем } C{=}0\text{).} \qquad (2.4.6)$$

Подставим (2.4.6) в (2.4.4):

$$u'e^{\varphi(x)} = Q(x). \qquad (2.4.7)$$

Соотношение (2.4.7) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим функцию u:

$$u = \psi(x) + C.$$

В итоге общее решение имеет вид:

$$y = uv = (\psi(x) + C)\varphi(x).$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения:

$$y' - \frac{y}{x} = x.$$

Решение. Сделав подстановку (2.4.3), получим:

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x;$$

$$u'v+\left[v'u-\frac{uv}{x}\right]=x;$$

$$u'v+u\left[v'-\frac{v}{x}\right]=x. \qquad (2.4.8)$$

Квадратную скобку приравняем к нулю и решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v'=\frac{v}{x};$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}.$$

Получаем: $\ln|v|=\ln|x|$ или $v=x$. Функцию $v=x$ подставляем в соотношение (2.4.8):

$$u'x=x.$$

Сокращаем на x, разделяем переменные и интегрируем:

$$u'=1;\ u=x+C\ .$$

Находим общее решение y:

$$y=uv=(x+C)x.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения:

$$y'+2xy=2x^2e^{-x^2}.$$

Решение. Сделав подстановку (2.4.3), получим:

$$u'v+v'u+2xuv=2x^2e^{-x^2},$$

$$u'v+[v'u+2xuv]=2x^2e^{-x^2},$$

$$u'v+u[v'+2xv]=2x^2e^{-x^2}. \qquad (2.4.9)$$

Квадратную скобку приравняем к нулю и решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' = -2xv;$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int x dx.$$

Получаем:

$$\ln|v| = -x^2 \text{ или } v = e^{-x^2}.$$

Функцию $v = e^{-x^2}$ подставляем в соотношение (2.4.9):

$$u' e^{-x^2} = 2x^2 e^{-x^2}.$$

Сокращаем на e^{-x^2}, разделяем переменные и интегрируем:

$$u' = 2x^2,$$

$$\int du = 2\int x^2 dx,$$

$$u = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Находим общее решение y:

$$y = uv = (\frac{2}{3}x^3 + C)e^{-x^2}.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения:

$$y' - \frac{y}{x} = x\cos x.$$

Решение. Сделав подстановку (2.4.3), получим:

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x\cos x;$$

$$u'v+\left[v'u-\frac{uv}{x}\right]=x\cos x;$$

$$u'v+u\left[v'-\frac{v}{x}\right]=x\cos x. \qquad (2.4.10)$$

Квадратную скобку приравняем к нулю и решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v'=\frac{v}{x};$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}.$$

Получаем: $\ln|v|=\ln|x|$ или $v=x.$

Функцию $v=x$ подставляем в соотношение (2.4.10):

$$u'x=x\cos x.$$

Сокращаем на x, разделяем переменные и интегрируем:

$$u'=\cos x;$$

$$\int du=\int\cos x dx.$$

$$u=\sin x+C\ .$$

Находим общее решение y:

$$y=uv=(\sin x+C\ )x.$$

2.4.2. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Приравняем правую часть исходного уравнения (2.4.1) к нулю, т.е. составим соответствующее линейное однородное уравнение:

$$y' + P(x)y = 0. \qquad (2.4.11)$$

Общее решение этого уравнения найдем путем разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx,$$

$$y = \varphi(x, C). \qquad (2.4.12)$$

Пусть постоянная *C*=*C(x)* – некоторая функция от *x*. Тогда общее решение (2.4.12) будет иметь вид:

$$y = \varphi(x, C(x)). \qquad (2.4.13)$$

Для нахождения функции *C(x)* нужно подставить (2.4.13) в исходное уравнение (2.4.1).

Пример 9. Найти общее решение уравнения:

$$y' - \frac{y}{x} = x.$$

Решение. Приравняем правую часть уравнения к нулю:

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = \frac{y}{x};$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

Получаем:

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C \text{ или } y = Cx.$$

Пусть постоянная $C=C(x)$ – некоторая функция от x. Тогда:

$$y = C(x) \cdot x. \tag{2.4.14}$$

Найдем производную:

$$y' = (C(x) \cdot x)' = C'(x) \cdot x + C(x) \cdot x' = C'(x) \cdot x + C(x). \tag{2.4.15}$$

Подставим (2.4.14) и (2.4.15) в исходное уравнение:

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x,$$

$$C'(x) = 1, \quad \int dC(x) = \int dx,$$

$$C(x) = x + C. \tag{2.4.16}$$

Подставим (2.4.16) в общее решение (2.4.14):

$$y = C(x) \cdot x = (x + C)x.$$

2.5. Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли – это дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{2.5.1}$$

где $n \neq 0$, $n \neq 1$. Для решения уравнения этого типа существует несколько способов: метод Бернулли, метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа), метод приведения к линейному виду и др.

Пример 10. Найти общее решение уравнения:

$$y' + \frac{y}{x} = -y^2.$$

Решение. Первый способ решения методом Бернулли. Сделав подстановку (2.4.3), получим:

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = -u^2v^2;$$

$$u'v + \left[v'u + \frac{uv}{x}\right] = -u^2v^2;$$

$$u'v + u\left[v' + \frac{v}{x}\right] = -u^2v^2. \qquad (2.5.2)$$

Квадратную скобку приравняем к нулю и решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' = -\frac{v}{x};$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Получаем:

$$\ln|v| = -\ln|x| \text{ или } v = \frac{1}{x}.$$

Функцию $v = \dfrac{1}{x}$ подставляем в соотношение (2.5.2):

$$u'\frac{1}{x} = -u^2\frac{1}{x^2}.$$

Сокращаем на x, разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{dx} = -u^2\frac{1}{x},$$

$$-\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C = \ln|Cx,| \qquad u = \frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Находим общее решение y:

$$y = uv = \frac{1}{x\ln|Cx|}.$$

<u>Второй способ решения методом Лагранжа.</u> Приравняем правую часть уравнения к нулю:

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Получаем:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C \text{ или } y = \frac{C}{x}.$$

Пусть постоянная $C=C(x)$ – некоторая функция от x. Тогда:

$$y = \frac{C(x)}{x}. \tag{2.5.3}$$

Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \left(C(x)\cdot x^{-1}\right) = C'(x)\cdot x^{-1} - C(x)\cdot x^{-2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}. \tag{2.5.4}$$

Подставим (2.5.3) и (2.5.4) в исходное уравнение:

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{C^2(x)}{x^2},$$

$$C'(x)=-\frac{C^2(x)}{x}, \qquad \frac{dC(x)}{dx}=-\frac{C^2(x)}{x},$$

$$-\int\frac{dC}{C^2(x)}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{C(x)}=\ln|x|+\ln C,$$

$$C(x)=\frac{1}{\ln|Cx|}. \qquad (2.5.5)$$

Подставим (2.5.5) в общее решение (2.5.3):

$$y=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{x\ln|Cx|}.$$

2.5.1. Метод приведения к линейному виду

Уравнение Бернулли (2.5.1) можно преобразовать к линейному виду (2.4.1). Для этого нужно сначала разделить обе части уравнения (2.5.1) на y^n:

$$y'\frac{1}{y^n}+P(x)y\cdot\frac{1}{y^n}=Q(x),$$

$$y'\cdot y^{-n}+P(x)y^{1-n}=Q(x). \qquad (2.5.6)$$

Сделаем подстановку:

$$y^{1-n}=z, \qquad (2.5.7)$$

где z – некоторая функция от x. Найдем ее производную:

$$z'=(y^{1-n})'=(1-n)y^{1-n-1}y'=(1-n)y^{-n}y'$$

и выразим

$$y'y^{-n} = \frac{z'}{1-n}, \qquad (2.5.8)$$

Подставив (2.5.7) и (2.5.8) в соотношение (2.5.6), получим линейное неоднородное уравнение:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x) \quad \text{или} \quad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Полученное уравнение затем можно решить методом Бернулли или Лагранжа.

Пример 11. Привести к линейному виду уравнение Бернулли и найти его общее решение:

$$y' + \frac{y}{x} = -y^2.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на y^2 :

$$y'\frac{1}{y^2} + \frac{y}{xy^2} = -1,$$

$$-y'y^{-2} - \frac{1}{x}y^{-1} = 1. \qquad (2.5.9)$$

Сделаем подстановку:

$$y^{-1} = z, \qquad (2.5.10)$$

найдем производную:

$$z' = (y^{-1})' = -y^{-2}y'. \qquad (2.5.11)$$

Подставив (2.5.10) и (2.5.11) в соотношение (2.5.9), получим линейное неоднородное уравнение:

$$z' - \frac{z}{x} = 1.$$

Решим уравнение методом Бернулли. Сделаем подстановку:

$$z = uv; \qquad z = u'v + v'u;$$

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = 1;$$

$$u'v + u\left[v' - \frac{v}{x}\right] = 1. \qquad (2.5.12)$$

Квадратную скобку приравняем к нулю и решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' = \frac{v}{x};$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}.$$

Получаем: $\ln|v| = \ln|x|$ или $v = x$. Функцию $v=x$ подставляем в соотношение (2.5.12):

$$u'x = 1.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}; \qquad \int du = \int \frac{dx}{x}$$

$$u = \ln|x| + \ln C \ = \ln|Cx|.$$

Находим общее решение z:

$$z = uv = x\ln|Cx|.$$

Сделав обратную подстановку, находим искомое общее решение:

$$y \ = \frac{1}{z} = \frac{1}{x\ln|Cx|}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка.
2. Дайте определения общего и частного решения дифференциального уравнения первого порядка.
3. Как называется задача нахождения частного решения?
4. Как можно найти частное решение из общего?
5. Перечислите типы дифференциальных уравнений первого порядка.
6. Каким методом решаются дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными?
7. Каким методом решается однородное дифференциальное уравнение первого порядка?
8. Каким методом решается линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка?
9. Какими методами решается линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка?
10. Какими методами решается уравнение Бернулли?

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов,т.1.– М: Наука. –2005, 526с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т.2. – М: Наука. –2005, 575с.
3. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Под ред. Ефимова А.В., Поспелова А.С. М. Ф-м.лит. – 2003, ч.2, 432 с. (http://www.rusfolder.com)
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах., т.2, М: Высшая школа – 2003, 415с. (http://www.diary.ru).
5. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.А. Дифференциальные уравнения. – М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2000. – 348 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА