Приложения определенных интегралов

Методические указания к выполнению индивидуального задания №2
по Математическому анализу

При решении задач по приложению определенных интегралов в геометрических и физических задачах используются следующие правила (см. Лекции).

1) Определение определенного интеграла как предела последовательности интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(\xi_i)\Delta x_i\,,$$

где a, b – пределы интегрирования.

2) Правило вычисления определенного интеграла (формула Ньютона-Лейбница):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)\,,$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$

3) Формула вычисления площади плоской фигуры.

а) Если плоская фигура ограничена графиком $y = f(x)$, осью OX и вертикальными прямыми $x = a,\ x = b$, то площадь фигуры

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

б) Если плоская фигура на отрезке $[a, b]$ ограничена снизу и сверху соответственно графиками $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, то площадь фигуры

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$$

4) Формула вычисления длины дуги.

Если участок непрерывной кривой (дуга) на отрезке $[a, b]$ задан уравнением $y = f(x)$, то длина дуги

$$L_{ab} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

5) Формула вычисления объема тела вращения.

Если плоская фигура ограничена графиком $y = f(x)$, осью OX и вертикальными прямыми $x = a,\ x = b$, то при вращении этой фигуры вокруг оси OX образуется т.н. тело вращения. Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

6) Формула вычисления площади поверхности вращения.

Если участок непрерывной кривой (дуга) на отрезке $[a, b]$ задан уравнением $y = f(x)$, то при вращении этой дуги вокруг оси OX образуется т.н. поверхность вращения. Площадь этой поверхности

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 2x - 2 \quad \text{и} \quad y = 2x + 2$$

Решение.

Для построения плоской фигуры начертим графики обеих функций и найдем точки пересечения графиков.

График 1: $y = x^2 + 2x - 2 \quad \rightarrow \quad y = (x + 1)^2 - 3$

Это парабола с вершиной (-1;-3), ветви направлены вверх.

График 2: $y = 2x + 2$

Это прямая с угловым коэффициентом 2, проходящая через точку (0;2)

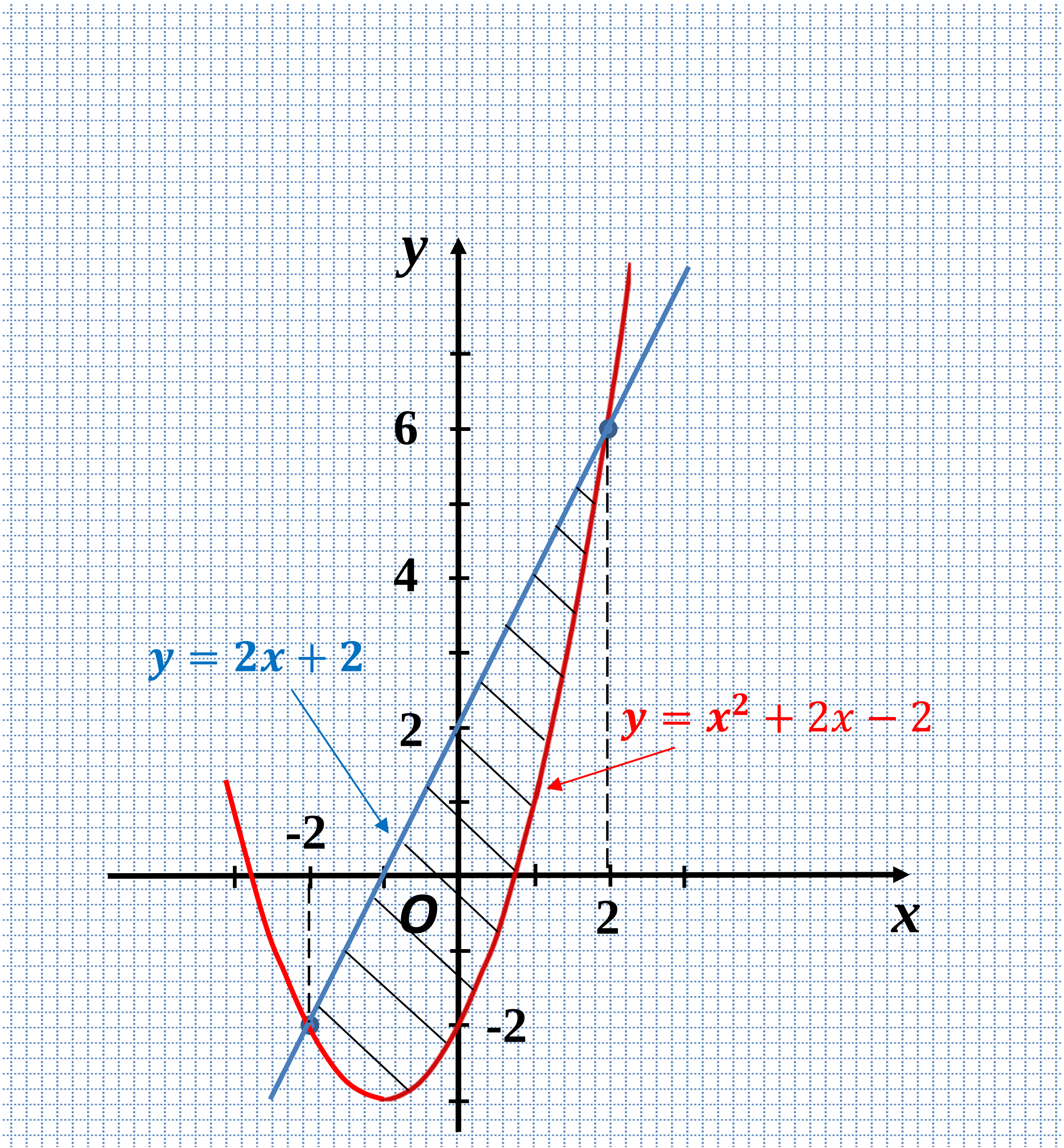
Точки пересечения:

$$x^2 + 2x - 2 = 2x + 2$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

Получаем рисунок



Таким образом, наша плоская фигура ограничена на отрезке $[-2, 2]$ снизу и сверху соответственно графиками $y = f_1(x) = x^2 + 2x - 2$ и $y = f_2(x) = 2x + 2$. Площадь фигуры

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx = \int_{-2}^{2} (2x + 2 - x^2 - 2x + 2)dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx = -\frac{x^3}{3} + 4x\,|_{-2}^{+2} = \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right) =$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Задача решена.

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* плоской фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{x+2}; \quad y = 0; \quad x = 1$$

Решение.

Для построения плоской фигуры начертим указанные линии:

График 1: $y = \sqrt{x+2}$

Это полупарабола с вершиной (-2;0), ветвь направлена вправо вверх.

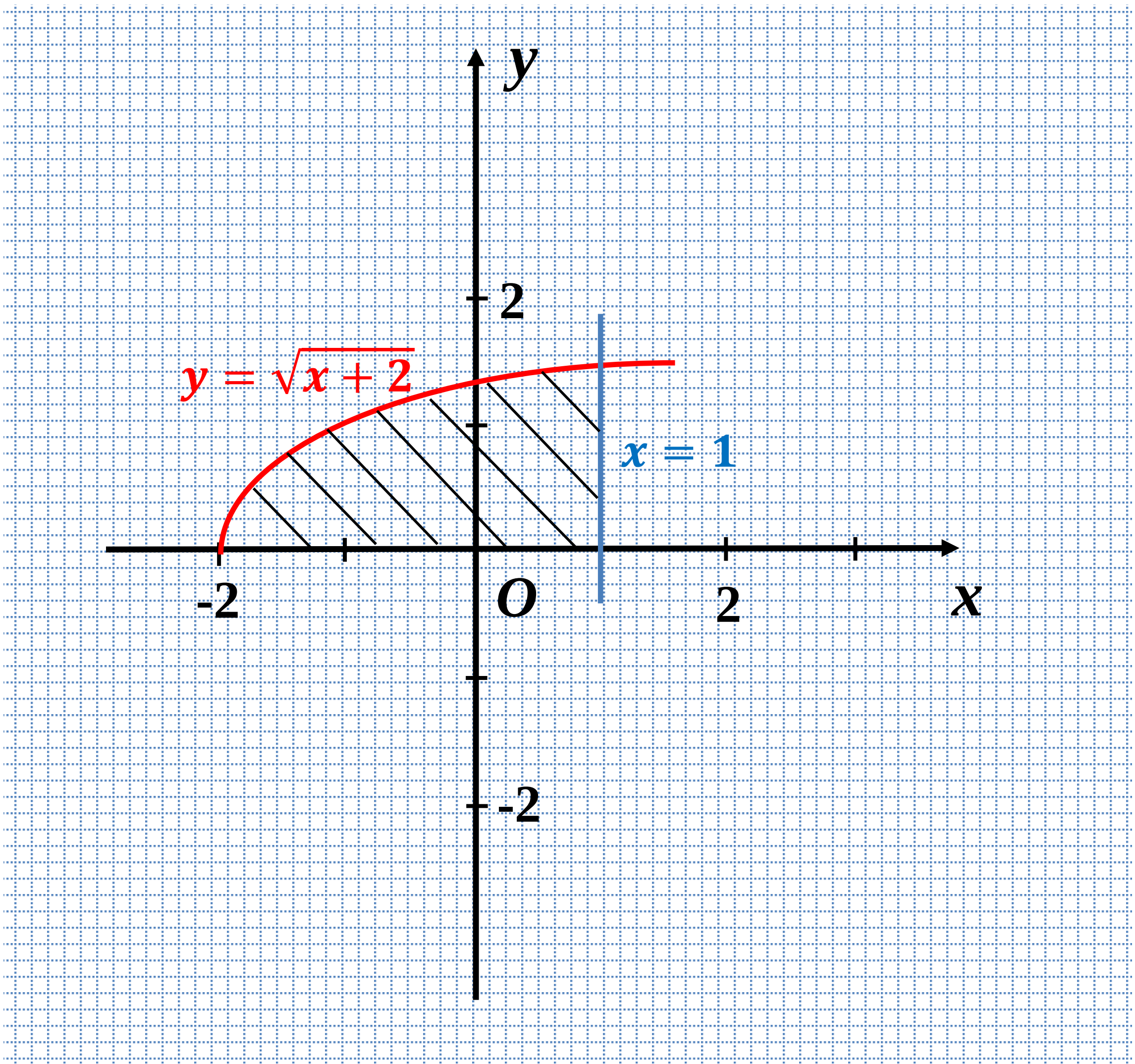
График 2: $y = 0$

Это ось *OX*.

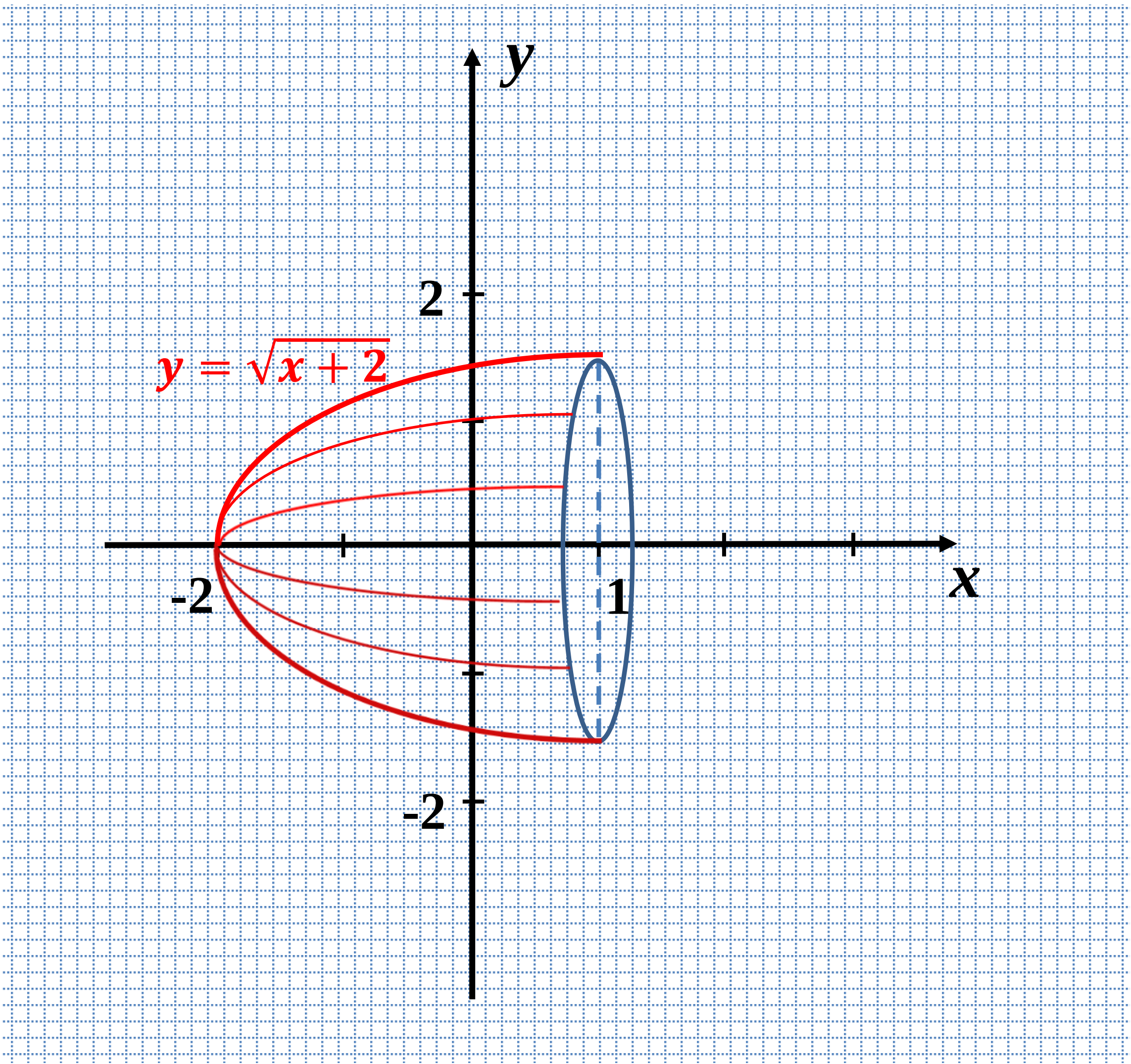
График 3: $x = 1$

Это вертикальная прямая, проходящая через точку (1;0)

Получаем рисунок:



При вращении этой фигуры вокруг оси OX образуется тело вращения:



Очевидно, что образующей этого тела вращения является график $y = f(x) = \sqrt{x+2}$

Объем этого тела:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-2}^{1} \left[\sqrt{x+2}\right]^2 dx = \pi \int_{-2}^{1} (x+2) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x \,|_{-2}^{+1} = \left(\frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right) = \frac{1}{2} + 2 - 2 + 4 = 4{,}5$$

Задача решена.