Исследование функций

Методические указания к выполнению индивидуального задания №1
по Математическому анализу

Нахождение наименьшего и наибольшего значения функции на отрезке

При нахождении наименьшего и наибольшего значения заданной функции на заданном отрезке выполняются следующие шаги.

1) Находят область определения функции.

2) Находят производную функции.

3) Находят критические точки I рода, в которых

а) $y' = 0$ б) $y' \nexists$ (не существует)

4) Выбирают критические точки, принадлежащие заданному отрезку.

5) Вычисляют значение функции в каждой из выбранных точек, а также в краях отрезка.

6) Из вычисленных значений выбирают наименьшее и наибольшее значения заданной функции на заданном отрезке.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на заданном отрезке

$$y = x^3 - 3x^2 + 4\,, \qquad [-3; 3/2]$$

Решение.

1) Находим область определения функции:

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

2) Находим производную функции:

$$y' = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x$$

3) Находим критические точки

а) $y' = 0$: $3x^2 - 6x = 0 \quad => \quad 3x(x-2) = 0 \quad => \quad x_1 = 0; \; x_2 = 2$

б) $y' \nexists$: таких точек нет

4) Выбираем критические точки, принадлежащие заданному отрезку $[-3; 3/2]$:

$x_1 = 0$ - подходит; $x_2 = 2$ - не подходит.

Оставляем только точку $x_1 = 0$

5) Вычисляем значение функции в выбранной точке, а также в краях отрезка:

$$y(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 + 4 = -50$$

$$y(0) = (0)^3 - 3 \cdot (0)^2 + 4 = 4$$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 = \frac{27}{8} - \frac{27}{4} + 4 = \frac{27}{8} - \frac{54}{8} + \frac{32}{8} = \frac{5}{8}$$

6) Из вычисленных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее значения:

$$y_{\text{наим}} = y(-3) = -50$$

$$y_{\text{наиб}} = y(0) = 4$$

Ответ: $y_{\text{наим}} = -50,\ y_{\text{наиб}} = 4$

<u>Исследование функции и построение графика</u>

При исследовании функции с построением графика выполняются следующие шаги.

1) Находят область определения функции.

2) Исследуют функцию по первой производной:

а) находят первую производную;

б) находят критические точки I рода, в которых

$$y' = 0 \quad \text{или} \quad y' \nexists\ ;$$

в) разбивают область определения критическими точками на интервалы;

г) в каждом интервале определяют знак производной и соответствующий характер поведения функции: если $y' < 0$, то функция убывает, если $y' > 0$, то функция возрастает; в точках изменения знака производной отмечают максимумы и минимумы, вычисляют в них значение функции.

3) Исследуют функцию по второй производной:

а) находят вторую производную y'';

б) находят критические точки II рода, в которых

$$y'' = 0 \quad \text{или} \quad y'' \nexists\ ;$$

в) разбивают область определения критическими точками на интервалы;

г) в каждом интервале определяют знак второй производной и соответствующий характер поведения функции: если $y'' < 0$, то функция выпуклая ($\frown$), если $y'' > 0$, то функция вогнутая (ᴗ); в точках изменения знака второй производной отмечают точки перегиба, вычисляют в них значение функции.

4) Находят асимптоты.

а) вертикальные асимптоты $x = a$:

вертикальные асимптоты существуют в краевых точках области определения функции, в том числе в точках разрыва; поэтому проверяют эти точки по условиям

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$$

Если хотя бы одно условие выполняется, то $x = a$ – вертикальная асимптота.

Если все три условия не выполняются, или область определения $(-\infty; +\infty)$, то вертикальных асимптот нет.

б) наклонные асимптоты $y = kx + b$:

коэффициенты k и b находят по формулам

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - kx$$

Если хотя бы один из этих двух пределов не существует или равен ∞, то наклонных асимптот нет.

5) Строят график функции.

Пример 2. Для заданной функции

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

1) найти точки экстремума и определить интервалы монотонности функции;

2) найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции;

3) найти асимптоты и построить график функции.

Решение.

1) Находим область определения функции.

Функция не определена, когда знаменатель равен нулю:

$$x - 1 = 0$$

$x = 1$ – точка разрыва.

Область определения: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2) Исследуем функцию по первой производной.

а) находим производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x-1) - x^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

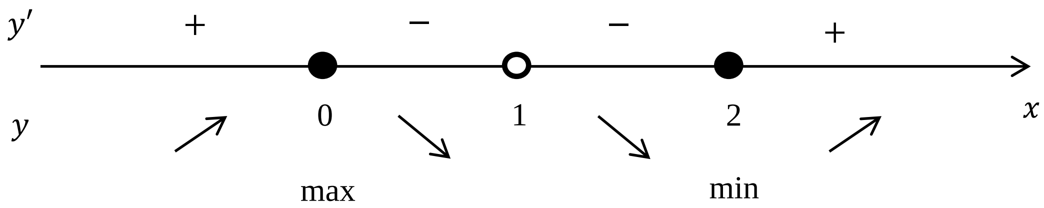
$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

б) находим критические точки:

$y' = 0$: $\quad x^2 - 2x = 0 \quad => \quad x(x-2) = 0 \quad => \quad x_1 = 0; \ \ x_2 = 2$

$y' \nexists$: $\quad (x-1)^2 = 0 \quad => \quad x = 1$ не принадлежит области определения, то есть таких критических точек нет

в) разбиваем область определения критическими точками на интервалы, в каждом интервале определяем знак производной и соответствующий характер поведения функции, отмечаем максимумы и минимумы, вычисляем в них значение функции:



$$y_{max} = y(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \,; \qquad y_{min} = y(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

Точка максимума: (0;0) , точка минимума: (2;4)

4) Исследуем функцию по второй производной.

а) находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(x^2-2x)' \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot ((x-1)^2)'}{((x-1)^2)^2}$$
$$= \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^3 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{2(x-1)\big((x-1)^2 - (x^2-2x)\big)}{(x-1)^4} = \frac{2(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

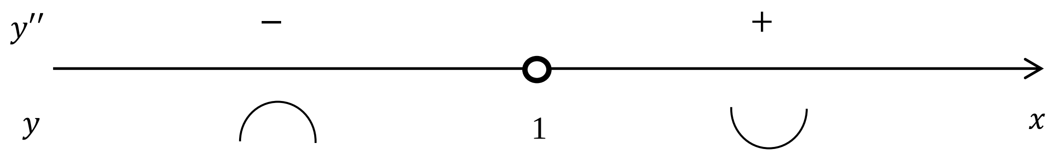
б) находим критические точки II рода

$y'' = 0 :$ $2 \neq 0$ => таких критических точек нет

$y'' \nexists :$ $(x-1)^3 = 0$ => $x = 1$ − не принадлежит области определения, то есть таких критических точек нет

Таким образом, критических точек II рода нет. Соответственно точек перегиба нет.

в) отмечаем на числовой прямой область определения; в каждом интервале определяем знак второй производной и соответствующий характер поведения функции.



4) Находим асимптоты.

а) вертикальные асимптоты $x = a$:

область определения: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

краевых точек нет, точка разрыва одна: $x = 1$

проверяем точку $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1^2}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Условие выполнено, следовательно

$x = 1$ – вертикальная асимптота.

б) наклонные асимптоты $y = kx + b$:

находим коэффициенты k и b:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$k = 1$$

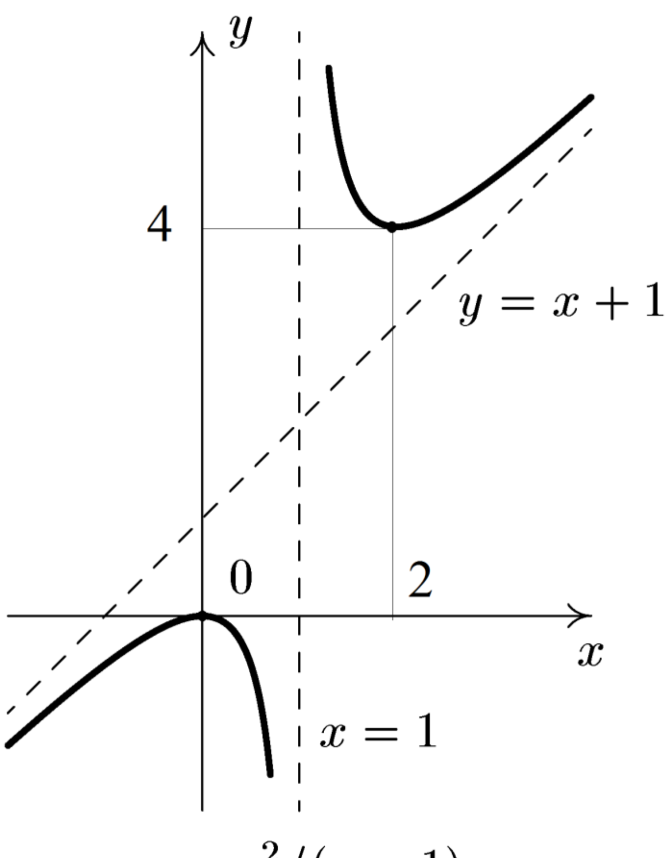
$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\infty}}$$

$$= \frac{1}{1-0} = 1$$

$$b = 1$$

$y = x + 1$ – наклонная асимптота

5) С учетом всех результатов исследования строим график функции:



$y = x^2/(x-1)$

Пример 3. Для заданной функции

$$y = x - 5\operatorname{arctg} x$$

1) найти точки экстремума и определить интервалы монотонности функции;

2) найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции;

3) найти асимптоты и построить график функции.

Решение.

1) Находим область определения функции.

Функция определена при любом x, поэтому:

$$\text{область определения:} \;\; x \in (-\infty; +\infty)$$

Замечание:

а) функция нечетная, поэтому график симметричен относительно начала координат;

б) график пересекает ось *OX* в точке $x = 0$ и в точках $x \approx \pm 7{,}2$

2) Исследуем функцию по первой производной.

а) находим производную функции:

$$y' = (x - 5\operatorname{arctg} x)' = 1 - \frac{5}{1+x^2} = \frac{1+x^2-5}{1+x^2} = \frac{x^2-4}{1+x^2}$$

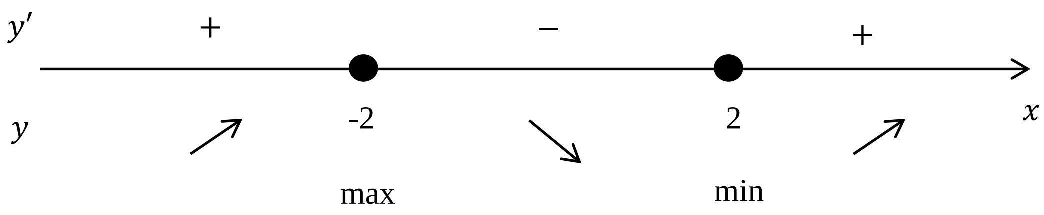
$$y' = \frac{x^2-4}{1+x^2}$$

б) находим критические точки:

$y' = 0:$ $\quad x^2 - 4 = 0 \quad => \quad (x+2)(x-2) = 0 \quad => \quad x_1 = -2; \;\; x_2 = 2$

$y' \nexists:$ $\quad 1 + x^2 \neq 0 \quad =>$ таких критических точек нет

в) разбиваем область определения критическими точками на интервалы, в каждом интервале определяем знак производной и соответствующий характер поведения функции, отмечаем максимумы и минимумы, вычисляем в них значение функции:



$$y_{max} = y(-2) = -2 - 5\,\mathrm{arctg}(-2) = -2 + 5\,\mathrm{arctg}\,2 \approx 3{,}5 \;;$$

$$y_{min} = y(2) = 2 - 5\,\mathrm{arctg}\,2 \approx -3{,}5$$

Точка максимума: $(-2; 3{,}5)$, точка минимума: $(-2; 3{,}5)$

4) Исследуем функцию по второй производной.

а) находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2-4}{1+x^2}\right)' = \frac{(x^2-4)'\cdot(1+x^2)-(x^2-4)\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{2x\cdot(1+x^2)-(x^2-4)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{2x+2x^3-2x^3+8x}{(1+x^2)^2} = \frac{10x}{(1+x^2)^2}$$

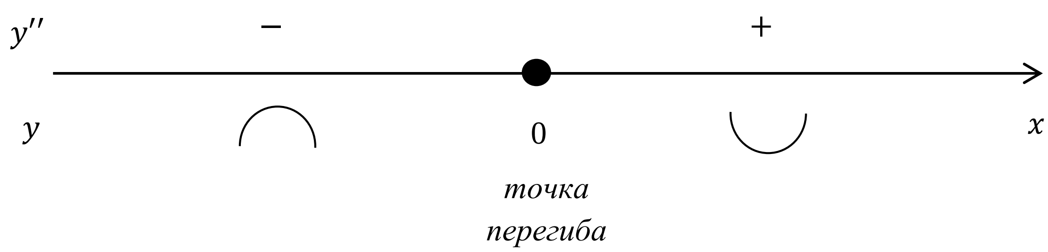
$$y'' = \frac{10x}{(1+x^2)^2}$$

б) находим критические точки II рода

$y'' = 0:\quad 10x = 0 \quad => \quad x = 0$

$y''\,\nexists:\quad (1+x^2)^2 \neq 0 \quad =>$ таких критических точек нет

в) разбиваем область определения критическими точками на интервалы; в каждом интервале определяем знак второй производной и соответствующий характер поведения функции, в точках изменения знака второй производной отмечаем точки перегиба, вычисляем в них значение функции.



$$y_{\text{тп}} = y(0) = 0 - 5\,\mathrm{arctg}(0) = 0 - 0 = 0\;;$$

Точка перегиба: $(0; 0)$

4) Находим асимптоты.

а) вертикальные асимптоты $x = a$:

область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$

краевых точек нет, точек разрыва нет, следовательно

вертикальных асимптот нет.

б) наклонные асимптоты $y = kx + b$:

находим коэффициенты k и b:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x - 5\,\mathrm{arctg}\,x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{5\,\mathrm{arctg}\,x}{x}\right) = 1 - \frac{\pm 5\cdot\frac{\pi}{2}}{\infty} = 1 \pm 0 = 1$$

$$k = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(x - 5\,\mathrm{arctg}\,x - x) = \lim_{x\to\infty}(-5\,\mathrm{arctg}\,x) = \pm 5\cdot\frac{\pi}{2} = \pm\frac{5\pi}{2}$$

$$b = \pm\frac{5\pi}{2}$$

наклонные асимптоты:

$$y = x + \frac{5\pi}{2}; \qquad y = x - \frac{5\pi}{2}$$

5) С учетом всех результатов исследования строим график функции: