МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Высшая математика»

Составители: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2019

1. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Суммой двух событий *A* и *B* называют событие $C=A+B$, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

В частности, если два события A и B - несовместные, то $C=A+B$ - событие, состоящее в появлении только одного из этих событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A):

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Вероятность появления синего шара (событие B):

$$P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

2. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ, ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛНУЮ ГРУППУ

Полной группой называют совокупность единственно возможных и несовместных событий данного испытания. Это означает, что в результате испытания может произойти только одно из этих событий.

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Пример 2. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов *A, B* и *C*. Вероятность получения пакета из города *A* равна 0,7, из города В - 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города *C*.

Решение. События “пакет получен из города *A*”, “пакет получен из города *B*” и “пакет получен из города *C*” образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$0{,}7 + 0{,}2 + p = 1.$$

Отсюда искомая вероятность:

$$p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Пример 3. При изготовлении детали возможны два вида брака: по длине и по диаметру. Вероятность брака по длине равна 0,2, по диаметру - 0,1. Найти вероятность того, что изготовленная деталь не бракованная.

Решение. События *A* -“деталь не бракованная”, *B* - “брак по длине” и С - “брак по диаметру” образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$0{,}1 + 0{,}2 + p = 1.$$

Отсюда искомая вероятность:

$$P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

3. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

Противоположными называют два несовместных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через *A,* то другое принято обозначать $\overline{A}$. Противоположное событие $\overline{A}$ состоит в непоявлении события *A*.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Пример 4. В ящике имеется 11 деталей, из которых 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди 3 наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна бракованная.

Решение. Задачу можно решить двумя способами.

1 способ. События “среди извлеченных деталей есть хотя бы одна бракованная” и “среди извлеченных деталей нет ни одной бракованной” - противоположные. Обозначим первое событие через *A,* а второе через $\overline{A}$:

$$P(A) =1 - P(\overline{A}).$$

Найдем $P(\overline{A})$. Общее число способов, которыми можно извлечь 3 детали из 11 деталей, равно числу сочетаний $C_{11}^3 = 165$. Число стандартных деталей равно 8*;* из этого числа деталей можно $C_8^3 = 56$ способами извлечь 3 стандартных детали. Поэтому вероятность того, что среди извлеченных 3 деталей нет ни одной нестандартной, равна: $P(\overline{A}) = \dfrac{C_8^3}{C_{11}^3} = \dfrac{56}{165}$.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий искомая вероятность равна: $P(A)=1 - P(\overline{A})=\dfrac{109}{165}$.

2 способ. Событие *A* - "среди извлеченных деталей есть хотя бы одна бракованная" - может реализоваться, как появление:

или события *B* - "извлечены 1 бракованная и 2 не бракованные детали", или события C - "извлечены 2 бракованные и 1 не бракованная детали",

или события D - "извлечены 3 бракованные детали".

Тогда $A=B+C+D$. Так как события B, C и D несовместные, то можно применить теорему сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A)=P(B)+P(C)+PD(D)=\frac{C_8^2C_3^1}{C_{11}^3}+\frac{C_8^1C_3^2}{C_{11}^3}+\frac{C_3^3}{C_{11}^3}=\frac{84}{165}+\frac{24}{165}+\frac{1}{165}=\frac{109}{165}.$$

4. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Произведением двух событий *A* и *B* называют событие $C=AB$, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, событие ABC состоит в совмещении событий A, B и C.

Два события называют **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Теорема. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Пример 5. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение. Обозначим события: A - появление герба на первой монете, B - появление герба на второй монете, C - появление герба на двух монетах $C=AB$.

Вероятность появления герба первой монеты:

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность появления герба второй монеты:

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

Так как события A и B независимые, то искомая вероятность по теореме умножения равна:

$$P(C)=P(AB) = P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Пример 6. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A):

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B):

$$P(B) = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C):

$$P(C) = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}8\ 0{,}7\cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Пример 7. Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Решение. Введем обозначения событий:

B_1 – появилось только событие A_1; B_2 – появилось только событие A_2.

Появление события B_1 равносильно появлению события $A_1\overline{A}_2$

(появилось первое событие и не появилось второе), т.е. $B_1 = A_1\overline{A}_2$.

Появление события B_2 равносильно появлению события $\overline{A}_1 A_2$ (не появилось первое событие и появилось второе), т.е. $B_1 = \overline{A}_1 A_2$.

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1 или A_2, достаточно найти вероятность появления одного, безразлично какого из событий B_1 и B_2. События B_1 и B_2 несовместны, поэтому применима теорема сложения несовместных событий :

$$P(B_1+B_2) = P(B_1) + P(B_2).$$

Остается найти вероятности каждого из событий B_1 и B_2. События A_1 и A_2 независимы, следовательно, независимы и противоположные события, поэтому применима теорема умножения:

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)= p_1q_2,$$
$$P(B_2) = P(\overline{A}_1 A_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)= q_1p_2,$$

где q_1 и q_2 – вероятность событий $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$соответственно.

Найдем искомую вероятность появления только одного из событий A_1 и A_2:

$$P(B_1+B_2) = P(B_1) + P(B_2) = p_1q_2 + q_1p_2.$$

Пример 8. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй - 0,9, третий - 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) только второй экзамен; б) только один экзамен; в) три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

Решение. а) Введем обозначения событий:

A_1 – студент сдаст первый экзамен, $\overline{A}_1$ – не сдаст первый экзамен;

A_2 – студент сдаст второй экзамен, $\overline{A}_2$ – не сдаст второй экзамен;

A_3 – студент сдаст третий экзамен, $\overline{A}_3$ – не сдаст третий экзамен;

A – студент сдаст только второй экзамен из трех, то есть: $A = \overline{A}_1 A_2\, \overline{A}_3$.

Так как события A_1, A_2 и A_3 независимы, получим:

$$P(A) = P(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 0{,}2 = 0{,}018.$$

б) Обозначим события:

B – студент сдаст один экзамен из трех;

B_1 – студент сдаст только первый экзамен A_1: $B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;

B_2 – студент сдаст только второй экзамен A_2: $B_2 = \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3$;

B_3 – студент сдаст только третий экзамен A_3: $B_1 = \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$.

События B_1, B_2 и B_3 несовместны, поэтому применима теорема сложения несовместных событий :

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=0{,}9\cdot0{,}1\cdot0{,}2+0{,}1\cdot0{,}9\cdot0{,}2+0{,}1\cdot0{,}1\cdot0{,}8=0{,}044.$$

в) Обозначим событие C – студент сдаст все три экзамена, т.е. $C=A_1A_2A_3$. Тогда:

$$P(C)=P(A_1A_2A_3)= P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}9\cdot0{,}9\cdot0{,}8=0{,}648.$$

г) Обозначим событие D – студент сдаст по крайней мере два экзамена (иначе говоря: хотя бы два экзамена или не менее двух экзаменов). Событие D означает, что студент сдаст или любые два экзамена из трех или все три экзамена, то есть:

$$P(D) = P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) + P(C) =$$
$$= 0{,}9\cdot0{,}9\cdot0{,}2 + 0{,}9\cdot0{,}1\cdot0{,}8 + 0{,}1\cdot0{,}9\cdot0{,}8 + 0{,}648 = 0{,}954.$$

д) Обозначим события:

E – студент сдаст хотя бы один экзамен;

$\overline{E}$ – студент не сдаст ни одного экзамена.

События E и $\overline{E}$ – противоположные, поэтому можно применить теорему сложения вероятностей противоположных событий:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - 0{,}1\cdot0{,}1\cdot0{,}2 = 0{,}998.$$

5. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Два события называют **зависимыми**, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или ненаступления другого события.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Для трех зависимых событий будем иметь:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C).$$

Пример 9. В урне находится 5 белых, 7 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие *A*), при втором - черный (событие *B)* и при третьем - синий (событие *C*).

Решение. Вероятность появления белого шара при первом испытании:

$$P(A)=\frac{5}{15}.$$

Вероятность появления черного шара при втором испытании, вычисленная в предположении, что при первом испытании появился белый шар, т. е. условная вероятность:

$$P_A(B)=\frac{7}{14}.$$

Вероятность появления синего шара при третьем испытании, вычисленная в предположении, что при первом испытании появился белый шар, а при втором - черный:

$$P_{AB}(C)=\frac{3}{13}.$$

Искомая вероятность:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{5}{15}\cdot\frac{7}{14}\cdot\frac{3}{13}=\frac{1}{26}.$$

Пример 10. Буква А написана на трех карточках, буква Н - на двух карточках, буква С - на одной карточке. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой. Какова вероятность получить слово "АНАНАС"?

Решение. Пусть событие *B* – получение слова "АНАНАС". Событие *B* наступит, если первой окажется карточка с буквой "А", второй – с буквой "Н", третьей – с буквой "А" и так далее. По теореме умножения зависимых событий получим:

$$P(B)=P(A)\cdot P_A(H)\cdot P_{AH}(A)\cdot P_{AHA}(H)\cdot P_{AHAH}(A)\cdot P_{AHAHA}(C)=$$
$$=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{60}=0{,}0167.$$

6. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Два события называют совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Пример 11. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий, соответственно, равны: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность попадания в цель при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одного орудия.

Решение. Задачу можно решить тремя способами.

1 способ. Обозначим события:

C – попадание в цель хотя бы одного орудия;

A – попадание первого орудия;

B – попадание второго орудия.

События *A* и *B* являются совместными. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события *A* и *B* независимы.

Вероятность события *AB* (оба орудия дали попадание):

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56.$$

Искомая вероятность:

$$P(C)=P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

2 способ. Обозначим события:

C – попадание в цель хотя бы одного орудия;

$\overline{C}$ – оба орудия промахнулись.

События C и $\overline{C}$ – противоположные, поэтому можно применить теорему сложения вероятностей противоположных событий:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}94.$$

3 способ. Введем обозначения событий:

C – попадание в цель хотя бы одного орудия;

A – попадание первого орудия;

B – попадание второго орудия.

C_1 – попадание только первого орудия $C_1 = A\overline{B}$;

C_2 – попадание только второго орудия $C_2 = \overline{A}B$;

C_3 – попадание двух орудий $C_3 = AB$.

События C_1, C_2 и C_3 несовместны, поэтому применима теорема сложения несовместных событий :

$$P(C) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

7. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n, которые образуют полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют **гипотезами.** Пусть известны вероятности гипотез и условные вероятности $P_{B1}(A)$, $P_{B2}(A)$, ..., $P_{Bn}(A)$ события A.

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A).$$

Эту формулу называют **формулой полной вероятности**.

Пример 12. Задача о слепом старце. Слепой старец вышел из пункта B в пункт A без поводыря. Из пункта B в пункт A ведут три дороги через пункты B_1, B_2 и B_3. Найти вероятность того, что он придет в пункт A. Предполагается, что слепой старец случайным образом выходит на ту или иную дорогу.

Решение. Обозначим через A событие - слепой старец попадет в пункт A. Можно сделать три гипотезы:

Событие B_1 - старец выбрал дорогу, ведущую в пункт B_1.

Событие B_2 - старец выбрал дорогу, ведущую в пункт B_2,

Событие B_3 - старец выбрал дорогу, ведущую в пункт B_3.

Вероятность каждой гипотезы равна:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Предположим, что старец выбрал дорогу через пункт B_1. Из этого пункта идут три дороги. Тогда условная вероятность того, что старец попадет в пункт A, если произойдет гипотеза B_1:

$$P_{B1}(A) = \frac{1}{3}.$$

Предположим, что старец выбрал дорогу через пункт B_2. Из этого пункта идут две дороги. Тогда условная вероятность того, что старец попадет в пункт A, если произойдет гипотеза B_2:

$$P_{B2}(A) = \frac{1}{2}.$$

Предположим, что старец выбрал дорогу через пункт B_3. Из этого пункта идет одна дорога. Тогда условная вероятность того, что старец попадет в пункт A, если произойдет гипотеза B_3:

$$P_{B3}(A) = 1.$$

Искомая вероятность того, что слепой старец попадет в пункт A, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B2}(A) +P(B_3)\cdot P_{B3}(A) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{11}{18}.$$

Пример 13. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго - 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) - стандартная.

Решение. Обозначим через A событие - извлеченная деталь стандартна.

Можно сделать две гипотезы: деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2).

Вероятность того, что деталь будет вынута из первого набора:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность того, что деталь будет вынута из второго набора:

$$P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь:

$$P_{B1}(A) = 0{,}8.$$

Условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь:

$$P_{B2}(A) = 0{,}9.$$

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь - стандартная, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Пример 14. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке - 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

Решение. Обозначим через A событие - из первой коробки извлечена стандартная лампа. Можно сделать две гипотезы: из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (событие B_1), либо нестандартная (событие B_2).

Вероятность того, что из второй коробки извлечена стандартная лампа,

$$P(B_1) = \frac{9}{10}.$$

Вероятность того, что из второй коробки извлечена нестандартная лампа,

$$P(B_2) = \frac{1}{10}.$$

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная лампа равна:

$$P_{B1}(A) = \frac{19}{21}.$$

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена нестандартная лампа, равна:

$$P_{B2}(A) = \frac{18}{21}.$$

Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечена стандартная лампа, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B2}(A) = \frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21} = 0{,}9.$$

8. ВЕРОЯТНОСТИ ГИПОТЕЗ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, ..., B_n, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{Bi}(A)}{P(A)} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B2}(A) + \ldots +P(B_n)\cdot P_{Bn}(A)$.

Пример 15. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму - 0,4. Вероятность того, что деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым - 0,98. Деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_1(A)}{P(B)\cdot P_{B1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B2}(A)}\ .$$

По условию задачи имеем:

$P(B_1)$ = 0,6 (вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру);

$P(B_2)$ = 0, 4 (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B1}(A)$ = 0,94 (вероятность того, что деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B2}(A)$ = 0,98 (вероятность того, что деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность:

$$P_A(B_1) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94 + 0{,}4\cdot 0{,}98} \approx 0{,}59.$$

Пример 16. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8; для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.

Решение. Обозначим события:

A – в мишени одна пробоина (одно попадание);

A_1 – первый стрелок попал в мишень $P(A_1)$ =0,8;

A_2 – второй стрелок попал в мишень $P(A_2)$ =0,4;

$\overline{A}_1$ – первый стрелок промахнулся $P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$

$\overline{A}_2$ – второй стрелок промахнулся $P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$

Можно выдвинуть четыре гипотезы:

B_1 – только первый стрелок попал в мишень, второй – промахнулся:

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}48,$$

B_2 – первый стрелок промахнулся, только второй стрелок попал в мишень:

$$P(B_2) = P(\overline{A}_1 A_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) = 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}08;$$

B_3 – оба стрелка не попали в мишень:

$$P(B_2) = P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}12;$$

B_4 – оба стрелка попали в мишень:

$P(B_2) = P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0,8\cdot 0,4=0,32.$

Найдем условные вероятности события A:

$P_{B1}(A) = 1$ (вероятность того, что одна пробоина сделана первым стрелком);

$P_{B2}(A) = 1$ (вероятность того, что одна пробоина сделана вторым стрелком);

$P_{B3}(A)=0$ (вероятность того, что в мишени одна пробоина, если оба попали);

$P_{B2}(A)=0$ (вероятность того, что одна пробоина, если оба промахнулись).

Искомую вероятность того, что попал первый стрелок, найдем по формуле Бейеса

$$P_A(B_1)\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)+P(B_4)\cdot P_{B_4}(A)}=$$

$$=\frac{0,48\cdot 1}{0,48\cdot 1+0,08\cdot 1+0,12\cdot 0+0,32\cdot 0}=0,857.$$

9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков. *Отв.* 0,4.
2. События A, B, C и D образуют полную группу. Вероятности событий: $P(A)$=0.1; $P(B)$=0.4; $P(C)$=0.3. Чему равна вероятность события D? *Отв.* 0,2.
3. По статистическим данным ремонтной мастерской в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 - для смены резца; 3 - из-за неисправности привода; 2 - из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам. *Отв.* 0,25.
4. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 руб. каждая, три книги по одному рублю и две книги - по 3 руб. Найти вероятность того, что взятые наудачу

две книги стоят 5 руб. *Отв.* 1/3.

5. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная. *Отв.* 44/45.
6. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали. *Отв.* 2/3 .
7. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадёт в мишень, равна p = 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание. *Отв.* 0.729.
8. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: “появился герб”, “появилось 6 очков”. *Отв.* 1/12.
9. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта. *Отв.* 0,817.
10. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартных), во втором – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными. *Отв.* 0,12.
11. В студии телевидения 3 камеры. Для каждой вероятность того, что она включена в данный момент, равна p=0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие A). *Отв.* 0,936.
12. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень. *Отв.* 0,88.
13. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом №1 и 4 детали завода №2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом №1. *Отв.* 92/95.
14. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие A)? *Отв.* 91/216.
15. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6.

Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет. *Отв.* 0,936.

16. Три команды A_1, A_2, A_3 спортивного общества A состязаются соответственно с тремя командами общества B. Вероятности того, что команды общества A выиграют матчи у команд общества B таковы: при встрече A_1 с B_1 - 0,8; A_2 с B_2 - 0,4; A_3 с B_3 - 0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьи во внимание не принимаются). Победа какого из обществ вероятнее? *Отв.* Общество $A.(p=0,544)$.
17. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком - 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком. *Отв.* 0,44 .
18. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что: *а)* из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным; *б)* нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие. *Отв. а)* 0,243; *б)* 0,0729.
19. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых и расположенных “в одну линию” кубиках можно будет прочесть слово “спорт”. *Отв.* 1/120.
20. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырёх вынутых по одной и расположенных “в одну линию” карточках, можно будет прочесть слово “трос”. *Отв.* 1/ 360.
21. Из цифр 1,2,3,4,5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех - вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза. *Отв.* а)3/5, б)3/5, в) 3/10.
22. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз? *Отв.* $n=2$.
23. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,75. Найти

вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же). *Отв.* 0,5.

24. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника 0,9, для велосипедиста 0,8 и для бегуна 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму. *Отв.* 0,86.
25. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом №1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, а завода №2 – 0,9. Сборщик наудачу извлёк деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь. *Отв.* 0,84.
26. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором 30 – деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что на удачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная. *Отв.* 43/60.
27. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы. *Отв.* 0,875.
28. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них 1 нестандартная; во втором 10 ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной. *Отв.* 13/132.
29. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой. *Отв.* 7/18.
30. В ящик, содержащий 3 детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике. *Отв.* 0,625.
31. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор *C1* с вероятностью 0,8, а

сигнализатор *C11* срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором *C1* или *C11* соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разладке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором *C1* или *C11*? *Отв.* Вероятность того, что автомат снабжён сигнализатором $p(C1)$=6/11, $p(C11)$=5/11.

32. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса – 4, из второй –6, из третьей группы – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадет в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент? *Отв.* p (I)=18/59; p(II)=21/59; p(III)=20/59.
33. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предлагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту. *Отв.* 0,998.

10. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие события называются несовместными, совместными, независимыми, зависимыми, противоположными?
2. Дайте определение суммы и произведения событий.
3. Что называется полной группой событий?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей несовместных событий.
5. Сформулируйте теорему сложения вероятностей событий, образующих полную группу.
6. Сформулируйте теорему сложения вероятностей противоположных событий.
7. Сформулируйте теорему умножения вероятностей независимых событий.

8. Сформулируйте теорему умножения вероятностей зависимых событий.
9. Сформулируйте теорему сложения вероятностей совместных событий.
10. В каких случаях применяются формула полной вероятности и формулы Байеса?

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – Изд.7-е, стер. – М.: Высш. шк. 2001.– 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – Изд.5-е, стер.– М.: Высш. шк. 2001. – 400 с.
3. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1991. – 157 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 . – 543 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Уч.-изд.л. – 1,04.