МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Составители: Ю.Б. Егорова
И.М. Мамонов

МОСКВА 2019

Егорова Ю.Б., Мамонов И.М. Непрерывные случайные величины: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика»/ Ю.Б. Егорова, И.М. Мамонов. М.: МАИ, 2019. 12 с.

1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1.1. Непрерывная случайная величина – величина, которая может принимать любое значение из некоторого промежутка числовой оси (конечного или бесконечного). Примеры непрерывных случайных величин: дальность полета артиллерийского снаряда, расход электроэнергии за определенный промежуток времени, температура тела или воздуха, вес изделия, рост человека и т.п.

1.2. Закон распределения непрерывной случайной величины можно задать двумя аналитическими способами:

1) с помощью функции распределения вероятностей $F(x)$;
2) с помощью плотности распределения вероятностей $f(x)$.

1.3. Функцией распределения непрерывной случайной величины называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее заданного x, т.е. $F(x)=P(X<x)$.

Свойства *F(x)*:

1. Функция $F(x)$ есть неубывающая и непрерывная функция.
2. Функция $F(x)$ есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей: $0 \le F(x) \le 1$.
3. $F(-\infty)=0$; $F(+\infty)=1$;
4. Вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал от α до β равна:

$$P(\alpha \le X \le \beta)=F(\beta)-F(\alpha). \qquad (1.1)$$

График функции распределения $F(x)$ приведен на рис. 1, а. График $F(x)$ для непрерывных случайных величин – непрерывная кривая в отличие от дискретных случайных величин, для которых график $F(x)$ – ступенчатая фигура.

1.4. Плотностью распределения вероятности *f(x)* непрерывной случайной величины X называется первая производная от функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \qquad (1.2)$$

Поэтому плотность распределения вероятности *f(x)* также называют **дифференциальной функцией распределения**, а *F(x)* – **интегральной функцией распределения**.

График плотности распределения вероятности *f(x)* называется **кривой распределения** (рис. 1, б-д).

Свойства *f(x)*:

1. Функция *f(x)* есть неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$.
2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в заданный интервал от α до β равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (1.3)$$

С геометрической точки зрения эта вероятность численно равна заштрихованной площади под кривой распределения (см. рис. 1, б).

3. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал от $-\infty$ до $+\infty$ равна 1:

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (1.4)$$

С геометрической точки зрения это означает, что вся площадь под кривой распределения = 1 (см. рис. 1, в).

4. Интегральную функцию распределения *F(x)* непрерывной случайной величины можно выразить через плотность распределения вероятностей по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (1.5)$$

С геометрической точки зрения интегральная функция распределения равна площади заштрихованной фигуры, ограниченной сверху кривой распределения и лежащей левее точки x (рис. 1, г).

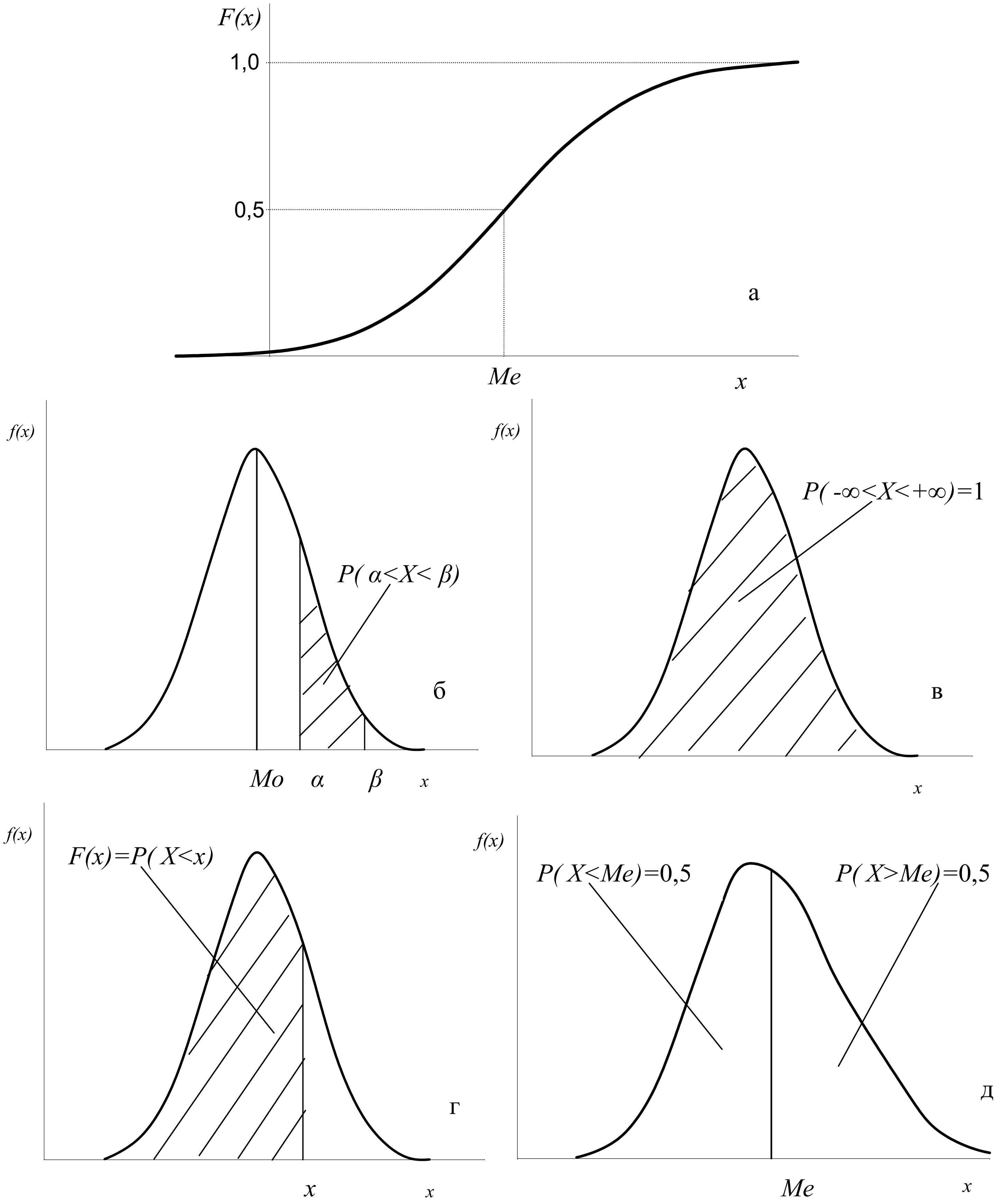

Рис. 1. Графики интегральной *F(x)* (а) и дифференциальной *f(x)* (б-д) функций распределения вероятности

1.5. Свойства непрерывных случайных величин:

1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю:

$$P(X=\alpha)=0.$$

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал от (α, β) не зависит от того, является ли этот интервал открытым или закрытым:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta).$$

2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

2.1. Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{1.6}$$

2.2. Дисперсия:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx. \tag{1.7}$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, рассмотренные для дискретных случайных величин, справедливы и для непрерывных величин.

2.3. Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{1.8}$$

2.4. Мода *Mo* (рис. 1, б) – наиболее вероятное значение случайной величины, т.е. это значение, имеющее наибольшую плотность распределения вероятности $f(x)$.

2.5. Медиана *Me* – значение случайной величины, для которого

$$P(X < Me) = P(X > Me) = \frac{1}{2}$$

или для которого интегральная функция распределения равна ½ (рис. 1, а):

$$F(Me) = \frac{1}{2}.$$

Геометрически вертикальная прямая $x=Me$ делит площадь под кривой распределения пополам (рис. 1, д).

2.6. Коэффициент ассиметрии *A* характеризует симметричность (скошенность) кривой распределения:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

где μ_3 – центральный момент третьего порядка:

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^3 f(x) dx.$$

Если кривая распределения симметрична относительно математического ожидания, то A=0 (рис. 1, б-г). Если коэффициент ассиметрии A>0, то кривая распределения имеет правостороннюю ассиметрию; если A<0 – левостороннюю ассиметрию.

2.7. Коэффициент эксцесса *ε* и эксцесс *E* характеризует островершинность (крутизну) кривой распределения:

$$E = \varepsilon - 3; \qquad \varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4},$$

где μ_4 – центральный момент четвертого порядка:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^4 f(x) dx.$$

Если E=0, то кривая распределения имеет нормальную крутизну (рис. 1, б-г). Если E>0, то кривая распределения более островершинная по сравнению с нормальной; если E<0 – более плосковершинная.

ПРИМЕР 1. Интегральная функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0; \\ \dfrac{x}{2} \quad при \quad 0 < x \le 2; \\ 1 \quad при \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (1, 3); б) плотность распределения вероятностей.

РЕШЕНИЕ.

а) По формуле (1.1) получим:

$$P(1<X<3)=F(3)-F(1)=1-1/2=1/2.$$

б) Плотность распределения вероятностей определим по формуле (1.2):

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0;\\ \dfrac{1}{2} & при \quad 0<x\le 2;\\ 0 & при \quad x>2.\end{cases}$$

ПРИМЕР 2. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1;\\ \dfrac{3}{x^4} & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию распределения; б) вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (2, 3).

РЕШЕНИЕ. а) Интегральную функцию распределения найдем по формуле (1.5). Если $x\le 1$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx=0.$$

Если $x>1$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0\cdot dx+\int_{1}^{x}\frac{3}{x^4}dx=0+\left(-\frac{1}{x^3}\right)\Bigg|_1^x=1-\frac{1}{x^3}.$$

Таким образом:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1;\\ 1-\dfrac{1}{x^3} & при \quad x>1.\end{cases}$$

б) Вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (2, 3), можно найти двумя способами.

По формуле (1.1):

$$P(2<X<3)=F(3)-F(2)=\left(1-\frac{1}{3^3}\right)-\left(1-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{19}{216}.$$

Или по формуле (1.3):

$$P(2<X<3)=\int_{2}^{3}\frac{3}{x^4}dx=-\frac{1}{x^3}\Bigg|_2^3=-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^3}=\frac{19}{216}.$$

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Интегральная функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1;\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4} & при \quad -1<x\le 3;\\ 1 & при \quad x>3.\end{cases}$$

Найти: а) вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (0, 2); б) построить график интегральной функции распределения вероятностей. Проиллюстрировать решение графически.

2. Интегральная функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0;\\ x^2 & при \quad 0<x\le 1;\\ 1 & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию распределения; б)вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале (0,5; 1), меньше 0,5, равное 0,5; в) математическое ожидание, г) дисперсию; д) построить графики $f(x)$ и $F(x)$. Проиллюстрировать решение задачи графически.

3. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0;\\ Cxe^{-x} & при \quad x\ge 0.\end{cases}$$

Найти: а) параметр C; б) вероятность того, что случайная величина попадет в интервал (2, 3).

4. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1;\\ x-\dfrac{1}{2} & при \quad 1<x\le 2;\\ 0 & при \quad x>2.\end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения; математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение непрерывной случайной величины.
2. Что называется законом распределения непрерывной случайной величины?
3. Дайте определение дифференциальной и интегральной функции распределения вероятностей.
4. Сформулируйте свойства дифференциальной функции (плотности) распределения вероятностей непрерывной случайной величины.
5. Сформулируйте свойства интегральной функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины.
6. Чему равны числовые характеристики непрерывной случайной величины?
7. Как можно найти вероятность попадания непрерывной случайной величины X в заданный интервал (α, β)?
8. Приведите примеры непрерывных случайных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк. 2001.– 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – 5-е изд., стер.– М.: Высш. шк. 2001. – 400 с.
3. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1991. – 157 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 . – 543 с.
5. Егорова Ю.Б., Мамонов И.М., Корниенко Л.И. Дискретные случайные величины. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика». – М.: Издательский центр МАТИ, 2005. – 20 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Уч.-изд.л. – 0,53