МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

Интервальные статистические оценки

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине "Математическая статистика"

Составители: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2020

ВВЕДЕНИЕ

Цель практического занятия – изучить способы интервального оценивания параметров нормального распределения (математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения).

Пример 1. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=\sigma(X)=3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания, если объем выборки $n=36$, выборочное среднее $\overline{x}=4{,}1$, доверительная вероятность $\gamma=0{,}95$.

Решение. Найдем сначала z_γ из равенства:

$$\Phi\left(z_\gamma\right)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0{,}95}{2}=0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (см. приложение 1) найдем аргумент z_γ, которому соответствует значение функции Лапласа, равное 0,475: $z_\gamma=1{,}96$.

Точность оценки можно найти по формуле:

$$\delta=z_\gamma\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\frac{3}{\sqrt{36}}=0{,}98.$$

Тогда **доверительный интервал для математического ожидания** $M(X)=m$ при уровне надежности $\gamma=0{,}95$ имеет вид:

$$x-\delta<m<x+\delta;$$

$$4{,}1-0{,}98<m<4{,}1+0{,}98;$$

$$3{,}12<m<5{,}08.$$

С заданной надежностью (вероятностью) 0,95 можно ожидать, что доверительный интервал (3,12; 5,08) содержит математическое ожидание.

Пример 2. Случайная величина *X* – средняя температура воздуха в марте – имеет нормальное распределение. По выборке объемом *n*=10 найдены выборочное среднее $\bar{x}=1{,}9^0$C и «исправленное» среднее квадратическое отклонение S=2,33^{0}C. Требуется найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания, если доверительная вероятность γ=0,95.

Решение. По таблице распределения Стьюдента (см. *приложение 2*) найдем:

$$t_{\gamma,n}= t_{0,95;10} =2{,}26.$$

Найдем предельную ошибку выборки:

$$\delta = t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}26\cdot\frac{2{,}33}{\sqrt{10}} = 1{,}666^0\,C.$$

Найдем доверительный интервал:

$$1{,}9-1{,}666 < m < 1{,}9+1{,}666;$$

$$0{,}234 < m < 3{,}566.$$

С вероятностью 0,95 можно ожидать, что доверительный интервал от 0,234 до 3,566^{0}C содержит неизвестное математическое ожидание (истинное значение средней температуры воздуха в марте).

Пример 3. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение. По выборке объемом n=20 определена «исправленная» дисперсия S^2=10. Найти доверительный интервал для оценки неизвестной генеральной дисперсии и среднего квадратического отклонения, если доверительная вероятность γ=0,95.

Решение. Сначала находим χ_1^2 и χ_2^2 (см. *приложение 3*):

$$\chi_2^2\left(k = n-1 = 20-1 = 19; \quad \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025\right) = 32{,}9;$$

$$\chi_1^2\left(k = n-1 = 20-1 = 19; \quad \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}975\right) = 8{,}91.$$

Тогда доверительный интервал для генеральной дисперсии имеет вид:

$$\frac{S^2(n-1)}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi_1^2};$$

$$\frac{10\cdot 19}{32{,}9} < \sigma^2 < \frac{10\cdot 19}{8{,}91};$$

$$5{,}78 < \sigma^2 < 21{,}3.$$

Доверительный интервал для генерального среднего квадратического отклонения имеет вид:

$$\sqrt{5{,}78} < \sigma < \sqrt{21{,}3};$$

$$2{,}4 < \sigma < 4{,}6.$$

Таким образом, с доверительной вероятностью 0,95 генеральная дисперсия заключена в интервале от 5,78 до 21,3, а среднее квадратическое отклонение – от 2,4 до 4,6.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором получены следующие результаты: 8, 9, 11, 12. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания, генеральной дисперсии и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью 0,95.
2. Дана интервальная оценка (8,45; 9,15) математического ожидания нормально распределенной случайной величины. Определить точечную оценку математического ожидания.
3. Из генеральной совокупности сделана выборка объемом $n=60$. Составлено статистическое распределение частот:

x_i, %	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95.

4. Найти минимальный объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,975 точность оценки математического ожидания будет равна 0,3, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=1,2$ нормально распределенной генеральной совокупности.
5. Найти минимальный объем выборки, при котором с доверительной вероятностью 0,95 точность оценки математического ожидания будет равна 0,2, если известно стандартное отклонение $S=1,5$ нормально распределенной генеральной совокупности.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте основную задачу теории статистических оценок.
2. Какая оценка называется интервальной?
3. Как находится доверительный интервал для математического ожидания при известном среднем квадратическом отклонении?
4. Как находится доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном среднем квадратическом отклонении?
5. Как находится доверительный интервал для генеральной дисперсии и среднего квадратического отклонения?

Приложение 1

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,00	0,0000	0,42	0,1628	0,84	0,2995	1,26	0,3969
0,01	0,0040	0,43	0,1664	0,85	0,3023	1,27	0,3980
0,02	0,0080	0,44	0,1700	0,86	0,3051	1,28	0,3997
0,03	0,0120	0,45	0,1736	0,87	0,3078	1,29	0,4015
0,04	0,0160	0,46	0,1772	0,88	0,3106	1,30	0,4032
0,05	0,0199	0,47	0,1808	0,89	0,3133	1,31	0,4049
0,06	0,0239	0,48	0,1844	0,90	0,3159	1,32	0,4066
0,07	0,0279	0,49	0,1879	0,91	0,3186	1,33	0,4082
0,08	0,0319	0,50	0,1915	0,92	0,3212	1,34	0,4099
0,09	0,0359	0,51	0,1950	0,93	0,3238	1,35	0,4115
0,10	0,0398	0,52	0,1985	0,94	0,3264	1,36	0,4131
0,11	0,0438	0,53	0,2019	0,95	0,3289	1,37	0,4147
0,12	0,0478	0,54	0,2054	0,96	0,3315	1,38	0,4162
0,13	0,0517	0,55	0,2088	0,97	0,3340	1,39	0,4177
0,14	0,0557	0,56	0,2123	0,98	0,3365	1,40	0,4192
0,15	0,0596	0,57	0,2157	0,99	0,3389	1,41	0,4207
0,16	0,0636	0,58	0,2190	1,00	0,3413	1,42	0,4222
0,17	0,0675	0,59	0,2224	1,01	0,3438	1,43	0,4236
0,18	0,0714	0,60	0,2257	1,02	0,3461	1,44	0,4251
0,19	0,0753	0,61	0,2291	1,03	0,3485	1,45	0,4265
0,20	0,0793	0,62	0,2324	1,04	0,3508	1,46	0,4279
0,21	0,0832	0,63	0,2357	1,05	0,3531	1,47	0,4292
0,22	0,0871	0,64	0,2389	1,06	0,3554	1,48	0,4306
0,23	0,0910	0,65	0,2422	1,07	0,3577	1,49	0,4319
0,24	0,0948	0,66	0,2454	1,08	0,3599	1,50	0,4332
0,25	0,0987	0,67	0,2486	1,09	0,3621	1,51	0,4345
0,26	0,1026	0,68	0,2517	1,10	0,3643	1,52	0,4357
0,27	0,1064	0,69	0,2549	1,11	0,3665	1,53	0,4370
0,28	0,1103	0,70	0,2580	1,12	0,3686	1,54	0,4382
0,29	0,1141	0,71	0,2611	1,13	0,3708	1,55	0,4394
0,30	0,1179	0,72	0,2642	1,14	0,3729	1,56	0,4406
0,31	0,1217	0,73	0,2673	1,15	0,3749	1,57	0,4418
0,32	0,1255	0,74	0,2703	1,16	0,3770	1,58	0,4429
0,33	0,1293	0,75	0,2734	1,17	0,3790	1,59	0,4441
0,34	0,1331	0,76	0,2764	1,18	0,3810	1,60	0,4452
0,35	0,1368	0,77	0,2794	1,19	0,3830	1,61	0,4463
0,36	0,1406	0,78	0,2823	1,20	0,3849	1,62	0,4474
0,37	0,1443	0,79	0,2852	1,21	0,3869	1,63	0,4484
0,38	0,1480	0,80	0,2881	1,22	0,3883	1,64	0,4495
0,39	0,1517	0,81	0,2910	1,23	0,3907	1,65	0,4505
0,40	0,1554	0,82	0,2939	1,24	0,3925	1,66	0,4515
0,41	0,1591	0,83	0,2967	1,25	0,3944	1,67	0,4525

x	$Φ(x)$	x	$Φ(x)$	x	$Φ(x)$	x	$Φ(x)$
1,68	0,4535	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969
1,69	0,4545	1,92	0,4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971
1,70	0,4554	1,93	0,4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,71	0,4564	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974
1,72	0,4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0,4582	1,96	0,4750	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0,4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0,4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0,4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0,4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0,4625	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0,4633	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0,4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,81	0,4649	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0,4664	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0,4671	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0,4678	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
1,86	0,4686	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0,4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		

Приложение 2

Квантиль распределения Стьюдента $t_{\gamma,n}$

Объем выборки	Доверительная вероятность (надежность) γ	
n	0,99	0,95
2	6,31	12,70
3	2,92	4,30
4	2,35	3,18
5	2,13	2,78
6	2,01	2,57
7	1,94	2,45
8	1,89	2,36
9	1,86	2,31
10	1,83	2,26
11	1,81	2,23
12	1,80	2,20
13	1,78	2,18
14	1,77	2,16
15	1,76	2,14
16	1,75	2,13
17	1,75	2,12
18	1,74	2,11
19	1,73	2,10
20	1,73	2,09
21	1,73	2,09
…	…	…

Приложение 3

Распределение Пирсона

Число степеней свободы $k=n-1$	χ^2 при уровне значимости α		
	0,975	0,025	0,05
1	0,001	5,0	3,8
2	0,051	7,4	6,0
3	0,216	9,4	7,8
4	0,484	11,1	9,5
5	0,831	12,8	11,1
6	1,24	14,4	12,6
7	1,69	16,0	14,1
8	2,18	17,5	15,5
9	2,70	19,0	16,9
10	3,25	20,5	18,3
11	3,82	21,9	19,7
12	4,40	23,3	21,0
13	5,01	24,7	22,4
14	5,63	26,1	23,7
15	6,26	27,5	25,0
16	6,91	28,8	26,3
17	7,56	30,2	27,6
18	8,23	31,5	28,9
19	8,91	32,9	30,1
20	9,59	34,2	31,4
21	10,3	35,5	32,7
22	11,0	36,8	33,9
23	11,7	38,1	35,2
24	12,4	39,4	36,4
25	13,1	40,6	37,7
26	13,8	41,9	38,9
27	14,6	43,2	40,1
28	15,3	44,5	41,3
29	16,0	45,7	42,6
30	16,8	47,0	43,8