МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Составители: Ю.Б. Егорова
И.М. Мамонов
А.В. Челпанов

МОСКВА 2019

Егорова Ю.Б., Мамонов И.М., Челпанов А.В. Показательный закон распределения: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика»/ Ю.Б. Егорова, И.М. Мамонов, А.В. Челпанов. М.: МАИ, 2019. 12 с.

1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1.1. Показательный (экспоненциальный) закон распределения играет большую роль в теории массового обслуживания и теории надежности.

Примеры случайных величин, имеющих показательный закон распределения: время ремонта устройств, время безотказной работы элементов, продолжительность телефонных вызовов, атомный распад радиоактивных веществ, живучесть существ и т.п.

1.2. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения) имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} \quad при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

где λ - параметр распределения. Если параметр λ известен, функция *f(x)* полностью определена.

График функции *f(x)* приведен на рис.1, а.

1.3. Интегральная функция распределения вероятностей имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} \quad при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

График функции *F(x)* приведен на рис. 1, б.

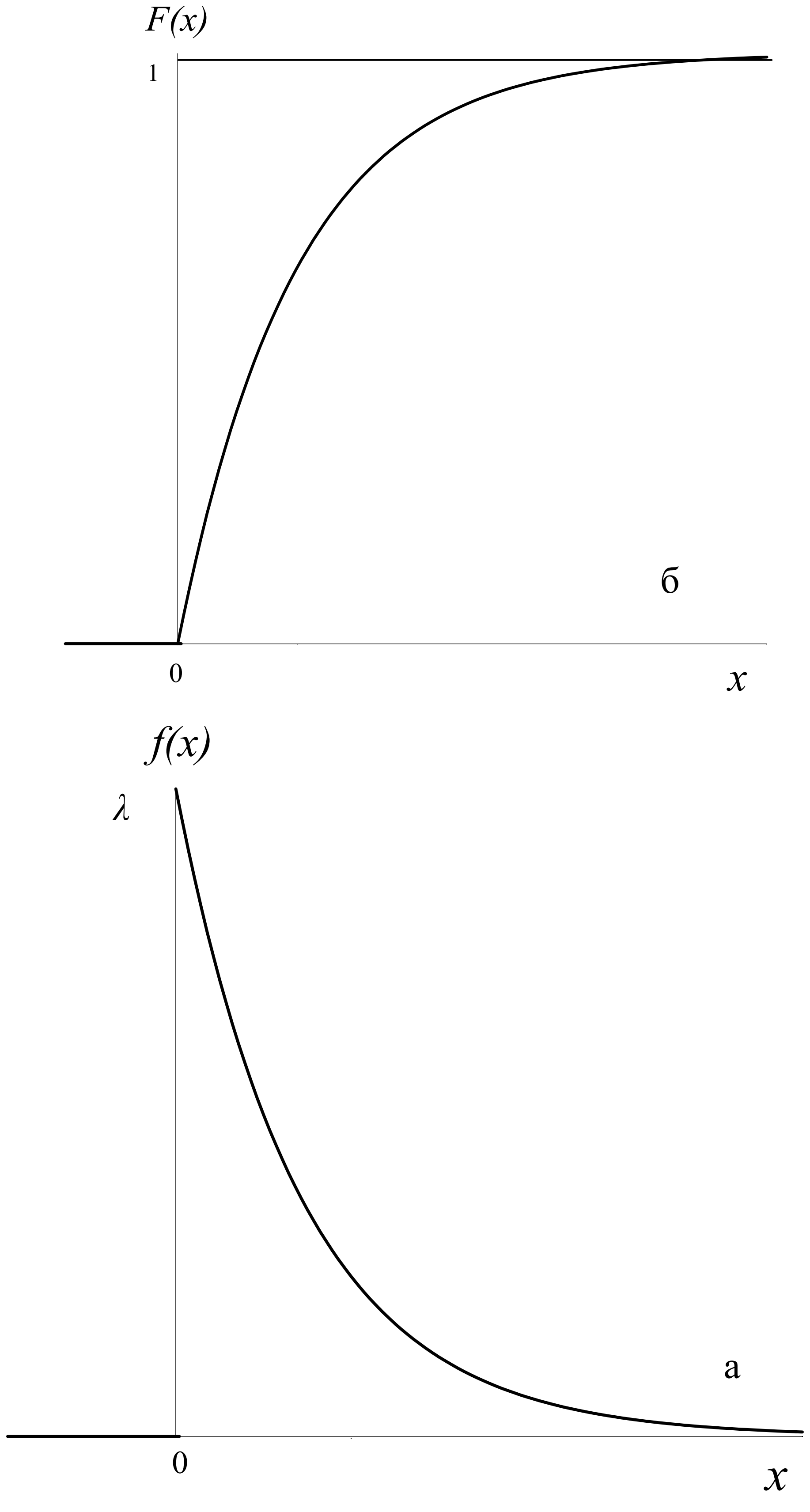

Рис. 1. Графики дифференциальной (а) и интегральной (б) функций распределения непрерывной случайной величины, имеющей показательный закон распределения

1.4. Числовые характеристики случайной величины, имеющей показательный закон распределения:

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение совпадают:

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Мода Mo=0.

Медиана $Me = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

Коэффициент ассиметрии A=2**.**

Коэффициент эксцесса ε=9, **эксцесс** E=ε –3=6.

2. Вероятность попадания в заданный интервал: вероятность того, что случайная величина X, имеющая показательный закон распределения, попадет в заданный интервал (α,β), равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}.$$

ПРИМЕР 1. Установлено, что время ремонта телевизоров – это непрерывная случайная величина X, распределенная по показательному закону. Среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.

а) Найти интегральную и дифференциальную функции распределения.

б) Построить кривую распределения и график интегральной функции распределения.

в) Найти числовые характеристики.

г) Определить вероятность того, что на ремонт телевизора понадобится не менее 20 дней. Проиллюстрировать решение задачи графически.

РЕШЕНИЕ.

а) Найдем сначала параметр λ. По условию задачи математическое ожидание:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = 15\,дней.$$

Тогда параметр λ:

$$\lambda = \frac{1}{M(X)} = \frac{1}{15}.$$

Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения) имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < 0; \\ \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x} \quad при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Интегральная функция распределения вероятностей имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < 0; \\ 1 - e^{-\frac{1}{15}x} \quad при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

б) Графики функций *f(x)* и *F(x)* приведены на рис. 2.

в) Числовые характеристики:

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение совпадают:

$$M(X) = \sigma(X) = 15\,дней.$$

Дисперсия:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 225\,(дней)^2.$$

Мода *Mo*=0 *дней*.

Медиана $Me = \frac{\ln 2}{\lambda} = 15 \ln 2 = 10{,}5 \quad дней.$

Коэффициент ассиметрии *A*=2.

Коэффициент эксцесса ε=9, эксцесс E=ε–3=6.

г) Определим вероятность того, что на ремонт телевизора понадобится не менее 20 дней:

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P\big(0 < X < 20\big) = 1 - (e^{-\frac{0}{15}} - e^{-\frac{20}{15}}) = 0{,}264.$$

На графике *f(x)* (рис. 2, а) заштрихованная площадь численно равна $P(X \geq 20) = 0{,}264$. На графике *F(x)* (рис. 2, б) искомая вероятность численно равна выделенному отрезку.

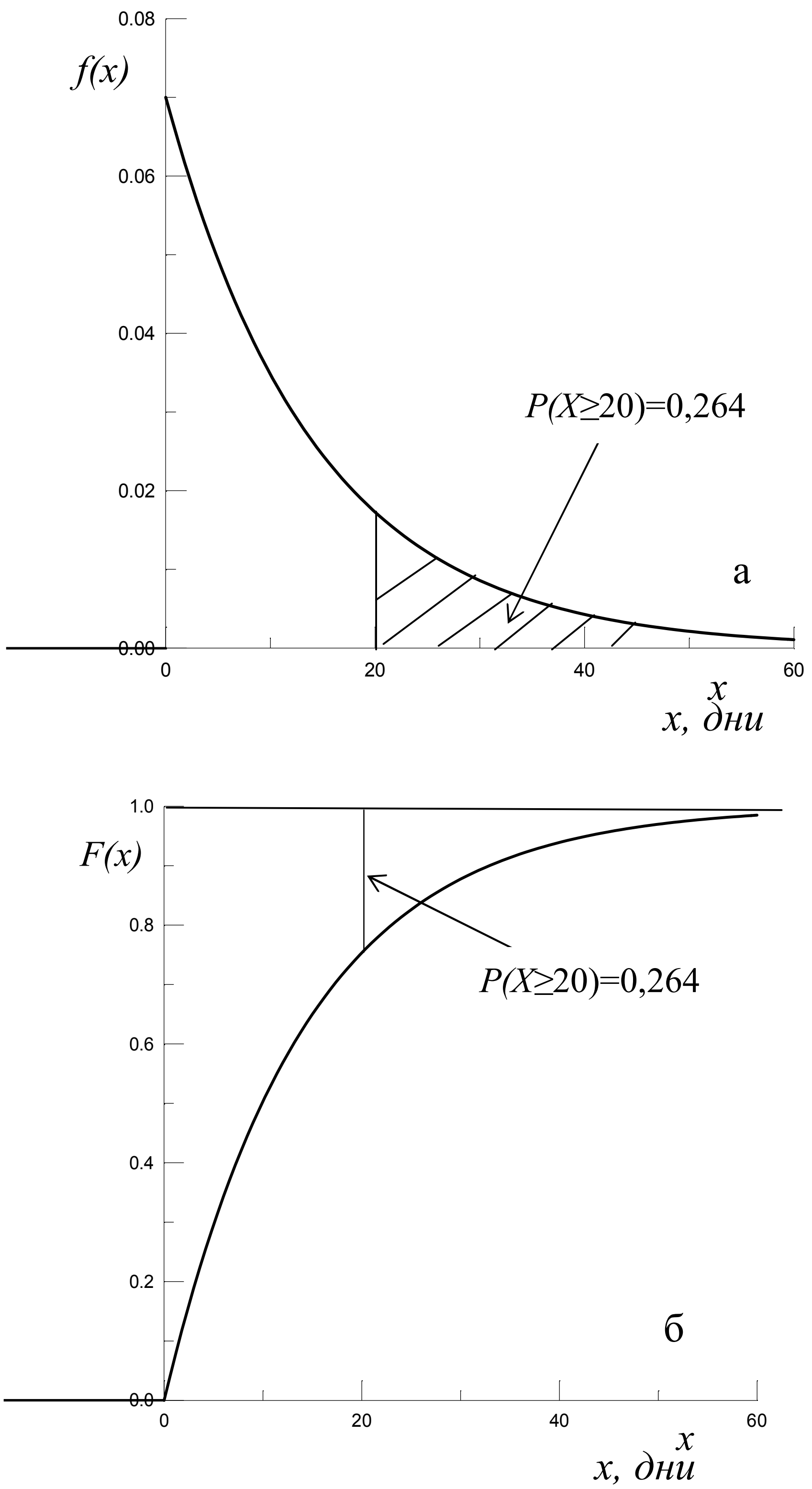

Рис. 2. Графики дифференциальной (а) и интегральной (б) функций распределения непрерывной случайной величины, имеющей показательный закон распределения с $\lambda=1/15$

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с параметром, который равен 3. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,13; 0,7).
2. Непрерывная случайная величина X – время безотказной работы элемента – распределена по показательному закону с параметром, который равен 0,02. Найти вероятность того, что элемент проработает менее 100 часов.
3. Студент помнит, что плотность распределения вероятности для показательного закона имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x<0; \\ Ce^{-\lambda x} \quad при \quad x \geq 0.\end{cases}$$

   Однако он забыл, чему равна постоянная С. Требуется найти С.
4. Установлено, что время между двумя ДТП в вечерний час пик – это непрерывная случайная величина X, распределенная по показательному закону. Среднее время между ДТП составляет 30 мин. а) Найти интегральную и дифференциальную функции распределения. б) Построить кривую распределения и график интегральной функции распределения. в) Найти числовые характеристики. г) Определить вероятность того, что время между ДТП превысит 30 мин. Проиллюстрировать решение задачи графически.
5. Среднее время безотказной работы элемента равно 80 ч. Полагая, что время безотказной работы элемента имеет показательный закон распределения, найти: а) дифференциальную и интегральную функции распределения; б) вероятность того, что прибор не выйдет из строя в течение 100 ч.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое распределение вероятностей называется показательным?
2. Чему равны числовые характеристики случайной величины, имеющей показательное распределение?
3. Как можно найти вероятность попадания случайной величины X, имеющей показательный закон распределения, в заданный интервал (α, β)?
4. Приведите примеры случайных величин, имеющих показательное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. Шк. 2001.– 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – 5-е изд., стер.– М.: Высш. Шк. 2001. – 400 с.
3. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. Шк., 1991. – 157 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 . – 543 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов
Александр Витальевич Челпанов

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Уч.-изд.л. – 0,53.