МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

# ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК СОБЫТИЙ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Составители: Ю.Б. Егорова
И.М. Мамонов

МОСКВА 2019

Егорова Ю.Б., Мамонов И.М. Простейший поток событий: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика»/ Ю.Б. Егорова, И.М. Мамонов. М.: МАИ, 2013. 19 с.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**1.1. Потоком событий** называется последовательность однородных событий, которые наступают в случайные моменты времени.

**Примеры потоков:** поступление вызовов на АТС или на пункт скорой помощи; прибытие самолетов в аэропорт; прибытие автомобилей на автозаправочную станцию; последовательность отказов элементов, ЭВМ, устройств; поток покупателей, пассажиров и т.п.

**1.2. Простейшим (пуассоновским, стационарным) потоком** называется поток событий, который обладает тремя свойствами: стационарностью, «отсутствием последействия», ординарностью.

Поток называется **стационарным**, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.

**ПРИМЕР 1.** Поток автомобилей в течение суток нестационарный, но в определенный промежуток времени (например, в час пик) поток становится стационарным, так как среднее число автомобилей в единицу времени приблизительно постоянен.

Поток называется потоком **«без последействия»**, если число событий в одном промежутке времени не зависит от числа событий, наступивших в другом промежутке времени.

**ПРИМЕР 2.** Поток пассажиров, входящих в метро днем, не зависит от того, сколько вошло ночью. Поток покупателей, отходящих от прилавка, имеет последействие, так как зависит от времени обслуживания каждого покупателя.

Поток называется **ординарным**, если появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможен, т.е. если события появляются в потоке поодиночке, а не группами.

**ПРИМЕР 3.** Поток поездов, подходящих к платформе - ординарен, а поток вагонов – неординарен.

## 2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЕЙШЕГО ПОТОКА

**2.1.** Простейший поток можно охарактеризовать **двумя случайными величинами**: числом событий, наступивших за определенное время, и временем между двумя последовательными событиями.

**2.2**. Дискретная случайная величина $X$ – число событий, наступивших за определенное время $\tau$, - имеет **закон распределения Пуассона**. ДСВ $X$ принимает значения 0, 1, 2,…, $m$,…, $n$ с вероятностями:

$$P_\tau(X=m)=\frac{(\lambda\tau)^m e^{-\lambda\tau}}{m!}, \qquad (2.1)$$

где $\lambda$ – интенсивность потока - среднее число событий, которые появляются в единицу времени $\tau$; $\lambda\tau$ – параметр распределения Пуассона; $m$= 0, 1, 2,…,$m$, …$n$. Значения $P(X=m)$ можно определить по таблицам распределения Пуассона в зависимости от $\lambda_{табл}=\lambda\tau$ и $m$ (см. Приложение) или подсчитать по формуле (2.1).

**2.2.1.Ряд распределения** Пуассона имеет вид:

| $X$ | 0 | 1 | … | $m$ | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $e^{-\lambda\tau}$ | $\lambda\tau e^{-\lambda}$ | … | $\frac{(\lambda\tau)^m e^{-\lambda\tau}}{m!}$ | … | $\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}$ |

**2.2.2.** Согласно таблице можно записать **функцию распределения случайной величины,** распределенной по закону Пуассона**:**

$$F(x)=0,\ x\le 0;$$

$$F(x)=\sum\frac{(\lambda\tau)^m e^{-\lambda\tau}}{m!},\qquad 0<x\le n;$$

$$F(x)=1,\ x>n.$$

**2.2.3. Математическое ожидание** и **дисперсия** случайной величины $X$, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру $\lambda\tau$ этого закона:

$$M(X)=D(X)=\lambda\tau.$$

**2.3.** Непрерывная случайная величина *T* – время между двумя последовательными событиями простейшего потока - имеет **показательный закон распределения**.

**2.3.1. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения)** имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad t < 0; \\ \lambda e^{-\lambda t} \quad при \quad t \geq 0. \end{cases}$$

График функции *f(t)* приведен на рис.1, а.

**2.3.2. Интегральная функция распределения** вероятностей имеет вид:

$$F(t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \quad при \quad t \geq 0. \end{cases}$$

График функции *F(t)* приведен на рис. 1, б.

**2.3.3. Числовые характеристики** случайной величины *T*:

**Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение** совпадают:

$$M(T) = \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

**Дисперсия**:

$$D(T) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

**Мода** *Mo*=0.

**Медиана** $Me = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

**Коэффициент ассиметрии** *A*=2**.**

**Коэффициент эксцесса** $\varepsilon$=9, **эксцесс** $E=\varepsilon-3=6$.

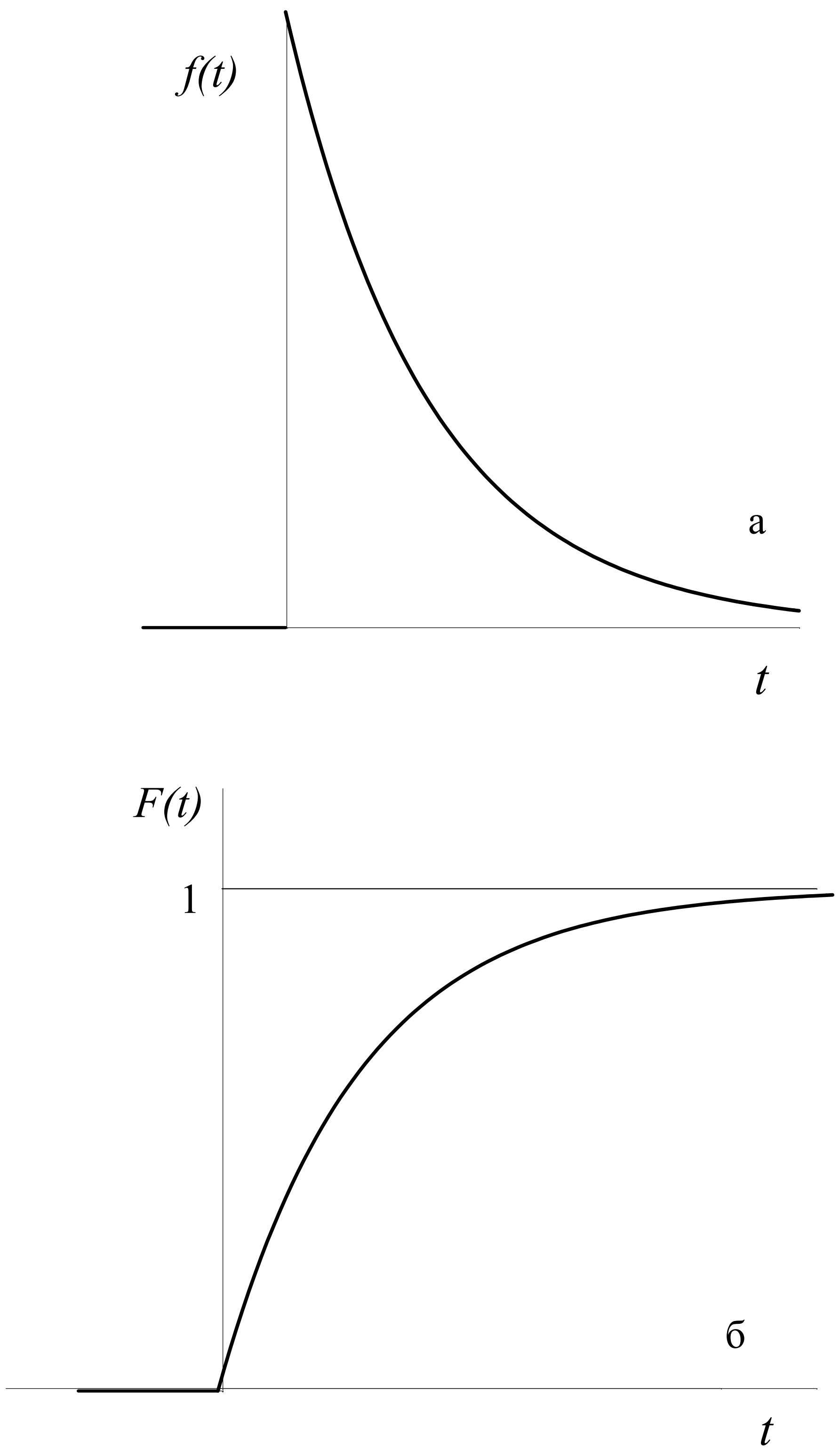


Рис. 1. Графики дифференциальной (а) и интегральной (б) функций распределения непрерывной случайной величины Т (времени между двумя последовательными событиями простейшего потока), имеющей показательное распределение

**ПРИМЕР 4.** На АТС поступает простейший поток вызовов с интенсивностью $\lambda$=0,2 вызова в секунду. а) Составить закон распределения числа вызовов в секунду. Найти числовые характеристики. б) Составить закон распределения времени ожидания вызова. Найти числовые характеристики. в) Чему равно среднее время ожидания вызова? г) Определить вероятность того, что за две секунды: не произойдет ни одного вызова; произойдет один вызов; хотя бы один вызов. д) Определить вероятность того, что время ожидания вызова превысит 2 секунды. Проиллюстрировать решение задачи графически.

РЕШЕНИЕ.

а) Дискретная случайная величина $X$ – число вызовов в секунду имеет закон распределения Пуассона с параметром $\lambda\tau$=0,2·1=0,2 вызова. Способы задания закона распределения дискретной случайной величины – это ряд распределения, многоугольник распределения, функция распределения.

Значения $P(X=m)$ найдем по таблице распределения Пуассона в зависимости от $\lambda_{табл}=\lambda\tau$=0,2 и $m$=1, 2, 3, … (см. Приложение). Тогда ряд распределения имеет вид:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,8187 | 0,1638 | 0,0164 | 0,0010 | 0,0001 | 0,000.. | 0,000… |

На основе ряда распределения построим многоугольник распределения (рис. 2, а) и найдем функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0; & x\le 0; \\ 0{,}8187; & 0<x\le 1; \\ 0{,}8187+0{,}1638=0{,}9825; & 1<x\le 2; \\ 0{,}9825+0{,}0164=0{,}9989; & 2<x\le 3; \\ 0{,}9989+0{,}0010=0{,}9999 & 3<x\le 4; \\ 0{,}9999+0{,}0001=1 & 4<x\le 5; \\ 1 & x>5. \end{cases}$$

График $F(x)$ приведен на рис. 2, б.

Числовые характеристики:

$M(X)=\lambda\tau$=0,2 *вызова*;

$D(X)=\lambda\tau$= 0,2 (*вызова*)$^2$;

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}2}=0{,}447$ *вызова*;

$Mo$=0 *вызовов*.

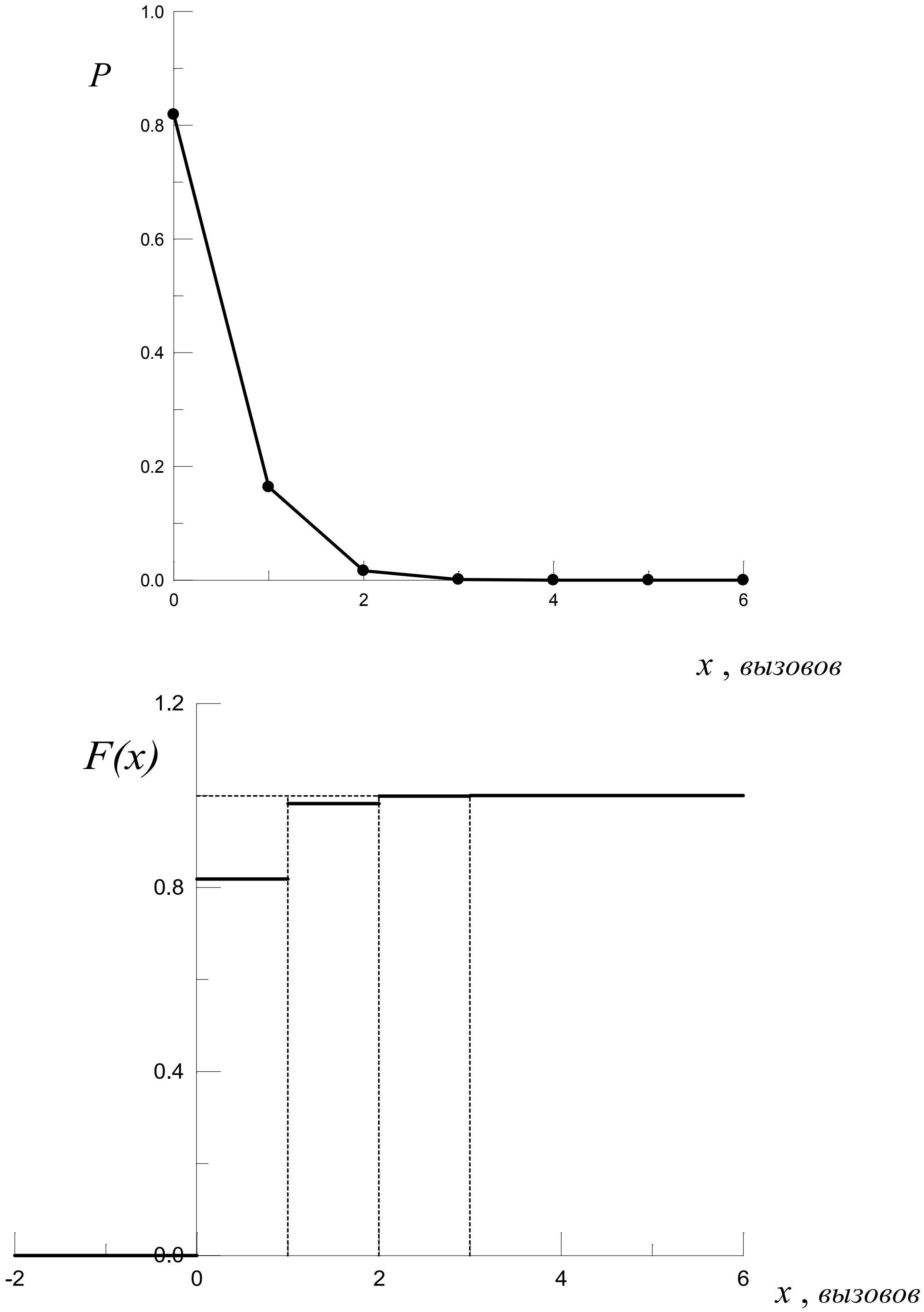


Рис. 2. Многоугольник распределения (а) и функция распределения (б) дискретной случайной величины $X$ (числа вызовов), имеющей закон распределения

б) Непрерывная случайная величина $T$ – время ожидания вызова - имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda$. Способы задания закона распределения непрерывной случайной величины – это дифференциальная и интегральная функции распределения вероятностей.

Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения) имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad t < 0; \\ 0{,}2e^{-0{,}2t} \quad при \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Интегральная функция распределения вероятностей имеет вид:

$$F(t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad t < 0 \\ 1 - e^{-0{,}2t} \quad при \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Графики функций *f(t)* и *F(t)* приведены на рис. 3.

Числовые характеристики случайной величины $T$:

$$M(T) = \sigma(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}2} = 5\,сек.$$

$$D(T) = \sigma^2(T) = 25\,сек.$$

$Mo$=0 *сек*.

$$Me = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0{,}2} = 3{,}5\,сек.$$

$A$=2.

$\varepsilon$=9, $E=\varepsilon-3$=6.

в) Среднее время ожидания вызова равно математическому ожиданию $M(T)$=5 *сек*.

г) Вероятность того, что за две секунды не произойдет ни одного вызова ($m$=0 ; $\tau$=2 *сек* ) и один вызов ($m$=1 ; $\tau$=2 *сек* ) можно определить по формуле (2.1):

$$P_2(X=0) = \frac{(0{,}2 \cdot 2)^0 e^{-0{,}2 \cdot 2}}{0!} = 0{,}6703;$$

$$P_2(X=1) = \frac{(0{,}2 \cdot 2)^1 e^{-0{,}2 \cdot 2}}{1!} = 0{,}2681$$

или по таблице распределения Пуассона в зависимости от $\lambda_{табл}=\lambda\tau=0{,}2 \cdot 2=0{,}4$; $m$=0; $m$=1 (см. Приложение).

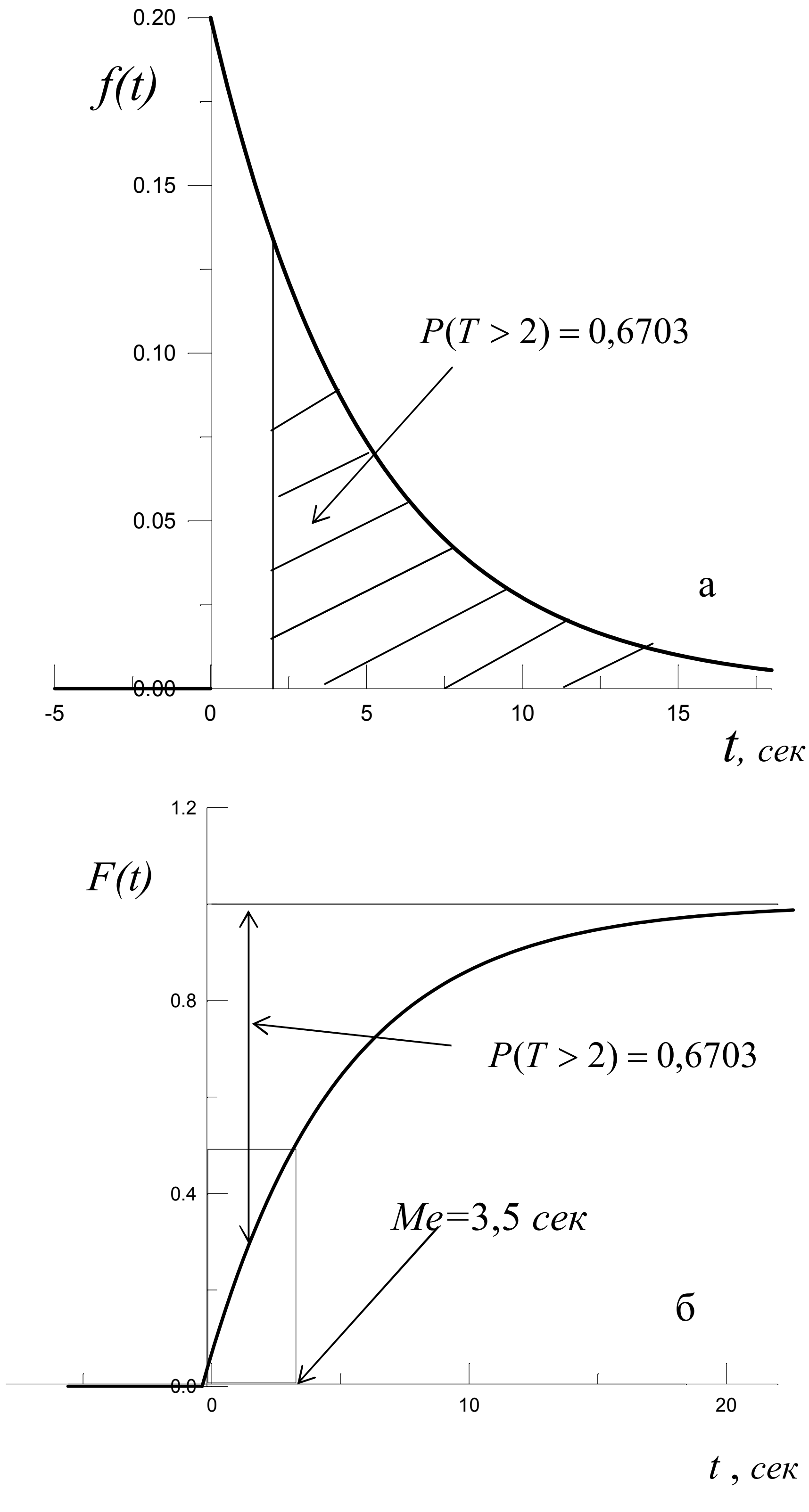


Рис. 3. График дифференциальной (а) и интегральной (б) функций распределения случайной величины $T$ (времени ожидания вызова), имеющей показательный закон распределения с параметром $\lambda\tau$=0,2 вызова

Вероятность того, что за две секунды произойдет хотя бы один вызов (т.е. или один, или два, или более вызовов), найдем с помощью теоремы сложения вероятностей противоположных событий:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}6703 = 0{,}3297.$

д) Определим вероятность того, что время ожидания вызова превысит 2 секунды:

$$P(T > 2) = P(2 < T < +\infty) = F(+\infty) - F(2) = 1 - (1 - e^{-0{,}2\cdot 2}) = 0{,}6703.$$

На графике *f(t)* (рис. 3, а) заштрихованная площадь численно равна $P(T > 2) = 0{,}6703$. На графике *F(t)* (рис. 3, б) искомая вероятность численно равна отрезку, выделенному стрелками.

## 2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. На АТС поступает простейший поток вызовов с интенсивностью 0,2 вызова в секунду. Составить законы распределения числа вызовов в секунду и времени ожидания вызова. Найти среднее время ожидания вызова. Определить числовые характеристики. Найти вероятность, что за 2 секунды: а) не произойдет ни одного вызова, б) произойдет ровно один вызов; в) произойдет хотя бы один вызов. Определить вероятность, что время ожидания вызова превысит 2 секунды. Проиллюстрировать решение задачи графически.

2. Среднее число инкассаторов, прибывающих утром в течение часа в банк, равно 2. Прибытие инкассаторов происходит случайно и независимо друг от друга. Составить законы распределения: а) числа инкассаторов, прибывающих в банк в течение часа; б) промежутка времени между прибытием инкассаторов. Найти числовые характеристики. Определить вероятность того, что: а) утром с 8 до 10 часов в банк прибудут хотя бы два инкассатора; б) число прибывших инкассаторов в эти часы окажется менее 3; в) время ожидания инкассатора не превысит 15 мин. Проиллюстрировать решение задачи графически.

3. В часы пик для общественного транспорта города происходит в среднем 2 дорожных происшествия в час. Утренний пик длится 1,5 часа, а вечерний – 2 ч. Составьте законы распределения: а) числа дорожных происшествий в утренние и вечерние часы пик; б) промежутка времени между двумя дорожными происшествиями утром и вечером. Найти числовые характеристики. Определить вероятность того, что: а) и утром, и вечером не произойдет ни одного дорожного происшествия, б) время между двумя вечерними дорожными происшествиями не превысит 20 мин. Проиллюстрировать решение задачи графически.

4. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Составить законы распределения числа заказов в минуту и времени ожидания заказа. Определить числовые характеристики. Найти вероятность, что за 2 мин поступит: а) 4 заказа, б) менее 4 заказов; в) не менее 4 заказов. Определить вероятность, что время ожидания заказа не превысит 3 мин. Проиллюстрировать решение задачи графически.

5. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти закон распределения времени ожидания очередной машины контролером, если поток простейший и время (в часах) распределено по показательному закону с интенсивностью потока, равной 5 автомобилей в час. Определить числовые характеристики времени ожидания машины контролером. Найти вероятность, что за два часа на контрольный пункт прибудут 4 машины. Определить вероятность того, что время ожидания очередной машины контролером превысит 10 мин. Проиллюстрировать решение задачи графически.

# 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение потока событий.
2. Какой поток событий называется простейшим?
3. Сформулируйте свойства стационарности, «отсутствия последействия», ординарности.
4. Какими случайными величинами можно охарактеризовать простейший поток событий? Какие законы распределения они имеют?
5. Приведите примеры простейших потоков.

# ЛИТЕРАТУРА


1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк. 2001.– 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – 5-е изд., стер.– М.: Высш. шк. 2001. – 400 с.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 . – 543 с.

**Приложение**

Таблица значений функции Пуассона $P(\lambda)=\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

| $m$ | $\lambda$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| 0 | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 |
| 1 | 0905 | 1638 | 2222 | 2681 | 3033 | 3293 | 3476 | 3595 | 3659 |
| 2 | 0045 | 0164 | 0333 | 0536 | 0758 | 0988 | 1217 | 1438 | 1647 |
| 3 | 0002 | 0019 | 0033 | 0072 | 0126 | 0198 | 0284 | 0383 | 0494 |
| 4 | | 0001 | 0002 | 0007 | 0016 | 0030 | 0050 | 0077 | 0111 |
| 5 | | | | 0001 | 0002 | 0004 | 0007 | 0012 | 0020 |
| 6 | | | | | | | 0001 | 0002 | 0003 |

Продолжение приложения 3

| $m$ | $\lambda$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | 0,3679 | 0,1353 | 0,0498 | 0,0183 | 0,0067 | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0000 |
| 1 | 3679 | 2707 | 1494 | 0733 | 0337 | 0149 | 0064 | 0027 | 0011 | 0005 |
| 2 | 1839 | 2707 | 2240 | 1465 | 0842 | 0446 | 0223 | 0107 | 0050 | 0023 |
| 3 | 0613 | 1804 | 2240 | 1954 | 1404 | 0892 | 0521 | 0286 | 0150 | 0076 |
| 4 | 0153 | 0902 | 1680 | 1954 | 1766 | 1339 | 0912 | 0572 | 0337 | 0189 |
| 5 | 0031 | 0361 | 1008 | 1563 | 1755 | 1606 | 1377 | 0916 | 0607 | 0378 |
| 6 | 0005 | 0120 | 0504 | 1042 | 1462 | 1606 | 1490 | 1221 | 0911 | 0631 |
| 7 | 0001 | 0037 | 0216 | 0595 | 1044 | 1377 | 1490 | 1396 | 1171 | 0901 |
| 8 | | 0009 | 0081 | 0298 | 0653 | 1033 | 1304 | 1396 | 1318 | 1126 |
| 9 | | 0002 | 0027 | 0132 | 0363 | 0688 | 1014 | 1241 | 1318 | 1251 |
| 10 | | | 0008 | 0053 | 0181 | 0413 | 0710 | 0993 | 1186 | 1251 |
| 11 | | | 0002 | 0019 | 0082 | 0225 | 0452 | 0722 | 0970 | 1137 |
| 12 | | | 0001 | 0006 | 0034 | 0126 | 0263 | 0481 | 0728 | 0948 |
| 13 | | | | 0002 | 0013 | 0052 | 0142 | 0296 | 0504 | 0729 |
| 14 | | | | 0001 | 0005 | 0022 | 0071 | 0169 | 0324 | 0521 |
| 15 | | | | | 0002 | 0009 | 0033 | 0090 | 0194 | 0347 |
| 16 | | | | | | 0003 | 0014 | 0045 | 0109 | 0217 |
| 17 | | | | | | 0001 | 0006 | 0021 | 0058 | 0128 |
| 18 | | | | | | | 0002 | 0009 | 0029 | 0071 |
| 19 | | | | | | | 0001 | 0004 | 0014 | 0037 |
| 20 | | | | | | | | 0002 | 0006 | 0019 |
| 21 | | | | | | | | 0001 | 0003 | 0009 |
| 22 | | | | | | | | | 0001 | 0004 |
| 23 | | | | | | | | | | 0002 |
| 24 | | | | | | | | | | 0001 |

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

# ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК СОБЫТИЙ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Уч.-изд.л. – 0,7.