Вычисление производных

Методические указания к выполнению индивидуального задания №1
по Математическому анализу

При вычислении производных используются следующие положения.

1) Определение производной:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2) Правила дифференцирования:

а) $C' = 0 \quad (C - const)$;

б) $\left(Cf(x)\right)' = C \cdot f'(x)$;

в) $(u(x) + v(x) + \cdots)' = u'(x) + v'(x) + \cdots$;

г) $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

д) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

3) Таблица производных элементарных функций:

а) $y = x^a \qquad y' = ax^{a-1}$;

частные случаи: $y = \sqrt{x} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$y = \frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}$;

б) $y = \sin x \qquad y' = \cos x$;

в) $y = \cos x \qquad y' = -\sin x$;

г) $y = \operatorname{tg} x \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

д) $y = \operatorname{ctg} x \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

е) $y = \arcsin x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

ж) $y = \arccos x \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

и) $y = \operatorname{arc\,tg} x \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$;

к) $y = \operatorname{arc\,ctg} x \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$;

л) $y = a^x \qquad y' = a^x \ln a$;

частный случай: $y = e^x \qquad y' = e^x$;

м) $y = \log_a x \qquad y' = \frac{1}{x \ln a}$;

частный случай: $y = \ln x \qquad y' = \frac{1}{x}$.

4) Правило дифференцирования сложной функции $y = f\big(u(x)\big)$:

$$\big[f\big(u(x)\big)\big]' = f'_u \cdot u'_x$$

5) Правило дифференцирования функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad => \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

6) Правило дифференцирования функции, заданной неявно:

(См. пример 5)

7) Логарифмическое дифференцирование:

(См. пример 6)

Пример 1. Найти производную функции

$$y = (x^6 - 9x^2)(x^4 + 2)$$

Решение.

Производная найдется проще, если данную функцию сначала преобразовать, раскрыв скобки:

$$y = (x^6 - 9x^2)(x^4 + 2) = x^{10} + 2x^6 - 9x^6 - 18x^2 = x^{10} - 7x^6 - 18x^2$$

С учетом данных преобразований решение имеет вид:

$$y' = [(x^6 - 9x^2)(x^4 + 2)]' = (x^{10} - 7x^6 - 18x^2)' = (x^{10})' - 7(x^6)' - 18(x^2)' \\ = 10x^9 - 42x^5 - 36x$$

Производная найдена.

Ответ:

$$y' = 10x^9 - 42x^5 - 36x$$

Пример 2. Найти производную функции

$$y = \frac{x^5 \cos x}{\ln x}$$

Решение.

Данная функция представляет собой частное двух функций, поэтому искать производную надо по правилу дифференцирования дроби (правило дифференцирования д)):

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

При этом необходимо также учесть, что функция, стоящая в числителе, в свою очередь представляет собой произведение двух функций. То есть искать производную числителя надо по правилу дифференцирования произведения (правило дифференцирования г)):

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

С учетом вышеизложенного решение имеет вид:

$$y' = \left(\frac{x^5 \cos x}{\ln x}\right)' = \frac{(x^5 \cos x)' \cdot \ \ln x - x^5 \cos x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{((x^5)' \cdot \cos x + x^5 \cdot (\cos x)') \cdot \ln x - x^5 \cos x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$= \frac{(5x^4 \cdot \cos x - x^5 \cdot \sin x) \cdot \ln x - x^4 \cos x}{\ln^2 x}$$

Производная найдена.

Ответ:

$$y' = \frac{(5x^4 \cdot \cos x - x^5 \cdot \sin x) \cdot \ln x - x^4 \cos x}{\ln^2 x}$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y = \mathrm{arctg}^5 x$$

Решение.

Данная функция представляет собой сложную функцию вида $y = u^5$, где $u = \mathrm{arctg}\, x$. То есть состоящую из двух функций: тригонометрической и степенной. Поэтому искать производную надо по правилу дифференцирования сложной функции $y = f\big(u(x)\big)$:

$$\big[f\big(u(x)\big)\big]' = f'_u \cdot u'_x$$

С учетом вышеизложенного решение имеет вид:

$$y' = (\mathrm{arctg}^5 x)' = 5\mathrm{arctg}^4 x \cdot (\mathrm{arctg}\, x)' = 5\mathrm{arctg}^4 x \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{5\mathrm{arctg}^4 x}{1 + x^2}$$

Производная найдена.

Ответ:

$$y' = \frac{5\mathrm{arctg}^4 x}{1 + x^2}$$

Пример 4. Найти производную функции

$$y = e^{\operatorname{tg}(2x^4 - 7x)}$$

Решение.

Данная функция представляет собой сложную функцию вида $y = e^u$, где $u = \operatorname{tg} v$, где $v = 2x^4 - 7x$. То есть состоящую из трех функций: степенной, тригонометрической и показательной. Поэтому искать производную надо по правилу дифференцирования сложной функции $y = f\left(u\big(v(x)\big)\right)$:

$$\left[f\left(u\big(v(x)\big)\right)\right]' = f'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

С учетом вышеизложенного решение имеет вид:

$$y' = \left(e^{\operatorname{tg}(2x^4-7x)}\right)' = e^{\operatorname{tg}(2x^4-7x)} \cdot \left(\operatorname{tg}(2x^4 - 7x)\right)' = e^{\operatorname{tg}(2x^4-7x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (2x^4 - 7x)'$$
$$= e^{\operatorname{tg}(2x^4-7x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (8x^3 - 7)$$

Производная найдена.

Ответ:

$$y' = \frac{e^{\operatorname{tg}(2x^4-7x)} \cdot (8x^3 - 7)}{\cos^2 x}$$

Пример 5. Найти производную функции

$$3\ln x + 4\sin y - 5x^6y^7 = 0$$

Решение.

Данное уравнение представляет функцию $y(x)$, заданную в неявном виде. Чтобы найти ее производную, это уравнение надо почленно продифференцировать по x. При этом необходимо учесть, что y есть функция аргумента x, то есть в данном случае $\sin y$ – сложная функция.

После почленного дифференцирования надо сгруппировать слагаемые, содержащие y', и вынести y' за скобки, а остальные слагаемые перенести направо. Затем делением найти y'.

С учетом вышеизложенного решение имеет вид:

$$3\ln x + 4\sin y - 5x^6y^7 = 0$$

$$(3\ln x)' + (4\sin y)' - (5x^6y^7)' = 0$$

$$3 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \cos y \cdot y' - 5((x^6)' \cdot y^7 + x^6 \cdot (y^7)') = 0$$

$$\frac{3}{x} + 4 \cdot \cos y \cdot y' - 5(6x^5 \cdot y^7 + x^6 \cdot 7y^6 \cdot y') = 0$$

$$\frac{3}{x} + 4 \cdot \cos y \cdot y' - 30x^5 \cdot y^7 - 35x^6 \cdot y^6 \cdot y' = 0$$

$$4 \cdot \cos y \cdot y' - 35x^6 \cdot y^6 \cdot y' = 30x^5 \cdot y^7 - \frac{3}{x}$$

$$y'(4\cos y - 35x^6y^6) = 30x^5y^7 - \frac{3}{x}$$

$$y' = \frac{30x^5y^7 - \frac{3}{x}}{4\cos y - 35x^6y^6}$$

Производная найдена.

Ответ:

$$y' = \frac{30x^6y^7 - 3}{4x\cos y - 35x^7y^6}$$

Как видно из данного примера, производная функции, заданной неявно, зависит не только от значения аргумента x, но и от соответствующего значения функции y.

Пример 6. Найти производную функции

$$y = (x^3 + 6x)^{\arcsin x}$$

Решение.

Данная функция представляет собой степень с переменным основанием и переменным показателем, то есть функцию вида $y = (u(x))^{v(x)}$. Такая функция не является сложной функцией, состоящей из двух функций, вложенных одна в другую. Она состоит из двух независимых функций: степенной $x^3 + 6x$ и тригонометрической $\arcsin x$.

Искать производную такой функции надо методом логарифмического дифференцирования.

Исходное уравнение функции логарифмируют по основанию e. При этом используют известное свойство логарифмов

$$\log a^b = b \log a$$

Полученное в результате равенство дифференцируют по x с учетом того, что y есть функция аргумента x.

Из уравнения, полученного в результате дифференцирования, выражают y'.

С учетом вышеизложенного решение данного примера имеет вид:

$$y = (x^3 + 6x)^{\arcsin x}$$

$$\ln y = \ln(x^3 + 6x)^{\arcsin x}$$

$$\ln y = \arcsin x \cdot \ln(x^3 + 6x)$$

Дифференцируем:

$$(\ln y)' = (\arcsin x \cdot \ln(x^3 + 6x))'$$

$$(\ln y)' = (\arcsin x)' \cdot \ln(x^3 + 6x) + \arcsin x \cdot (\ln(x^3 + 6x))'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \ln(x^3 + 6x) + \arcsin x \cdot \frac{1}{x^3 + 6x} \cdot (3x^2 + 6)$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \ln(x^3 + 6x) + \arcsin x \cdot \frac{1}{x^3 + 6x} \cdot (3x^2 + 6)\right)$$

$$y' = y\left(\frac{\ln(x^3 + 6x)}{\sqrt{1 - x^2}} + \arcsin x \cdot \frac{3x^2 + 6}{x^3 + 6x}\right)$$

Подставим вместо y его исходное выражение:

$$y' = (x^3 + 6x)^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{\ln(x^3 + 6x)}{\sqrt{1 - x^2}} + \arcsin x \cdot \frac{3x^2 + 6}{x^3 + 6x}\right)$$

Производная найдена.

Ответ:

$$y' = (x^3 + 6x)^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{\ln(x^3 + 6x)}{\sqrt{1 - x^2}} + \arcsin x \cdot \frac{3x^2 + 6}{x^3 + 6x}\right)$$