МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

Гипотезы о средних.
Сравнение выборочной средней с математическим ожиданием

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине "Математическая статистика"

Составители: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2020

ВВЕДЕНИЕ

Цель практического занятия – изучить способы проверки статистических гипотез о сравнении выборочной средней с математическим ожиданием нормального распределения для двух случаев (генеральная дисперсия известна; генеральная дисперсия неизвестна).

ПРИМЕР 1. Техническая норма предусматривает в среднем 21 сек. на выполнение определенной технологической операции на конвейере по сборке часов. От работающих на этой операции поступили жалобы, что в действительности они затрачивают на нее больше времени. Для проверки были проведены измерения времени выполнения этой операции у 36 работниц. Получено среднее время выполнения операции 21,6 сек, выборочное среднее квадратическое отклонение 0,36 сек. Можно ли по данным выборки считать, что среднее время выполнения операции соответствует норме?

РЕШЕНИЕ. По условию n=36; $\bar{x} = 21{,}6$ сек; $\sigma \approx \sigma^*(X)$=100 сек, m_0=21 сек. Выберем уровень значимости α=0,05.

Выдвигаем нулевую гипотезу H_o: $M(X)= m_0$. Относительно альтернативной гипотезы возможны два случая: а) $M(X) \neq m_0$; б) H_1: $M(X) > m_0$ (так как $\bar{x} > m_0$). Рассмотрим эти случаи.

а) H_o: $M(X)$=21 сек.

H_1: $M(X)\neq$21 сек.

В этом случае строят **двустороннюю критическую область**.

Порядок проверки нулевой гипотезы:

1) по выборке определяем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{набл} = \frac{(\bar{x} - m_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(21,6 - 21)\sqrt{36}}{0,36} = 10.$$

2) по таблице функции Лапласа (см. Приложение 1) определяем критическое значение критерия $u_{крит} = 1,96$ из равенства $\phi(u_{крит}) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{0,05}{2} = 0,475.$

3) Так как $|U_{набл}| = 10 > u_{крит} = 1,96$, то нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная.

б) H_o: $M(X)$=21 сек.

H_1: $M(X)$>21 сек.

В этом случае строят **правостороннюю критическую область**.

Порядок проверки нулевой гипотезы:

1) по выборке определяем наблюдаемое значение критерия $U_{набл} = 10.$

2) по таблице функции Лапласа (см. Приложение 1) определяем критическое значение критерия $u_{крит}$=1,645 из равенства $\phi(u_{крит}) = \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} - 0,05 = 0,45.$

3) Так как $|U_{набл}| = 10 > u_{крит} = 1{,}645$, то нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная.

Таким образом, с вероятностью 0,95 можно утверждать, что выборочное среднее и математическое ожидание (генеральное среднее) различаются значимо и, следовательно, жалобы работниц обоснованы.

ПРИМЕР 2. Производители нового типа аспирина утверждают, что он снимает головную боль за 30 мин. Случайная выборка 25 человек, страдающих головными болями, показала, что новый тип аспирина снимает головную боль за 28,6 мин при среднем квадратическом отклонении 4,2 мин. Проверьте при уровне значимости 0,05 справедливость утверждения производителей аспирина о том, что это лекарство излечивает головную боль за 30 мин.

РЕШЕНИЕ. По условию n=25; $\bar{x} = 28{,}6$ мин; S=4,2 мин; m_0=30 мин.

Выдвигаем нулевую гипотезу H_o: $M(X) = m_0$. Относительно альтернативной гипотезы возможны два случая: а) $M(X) \neq m_0$; б) H_1: $M(X) < m_0$ (так как $\bar{x} < m_0$). Рассмотрим эти случаи.

а) H_o: $M(X)$=30 мин.

H_1: $M(X) \neq 30$ мин.

В этом случае строят **двустороннюю критическую область**.

Порядок проверки нулевой гипотезы:

1) по выборке определяем наблюдаемое значение критерия $T_{набл}$:

$$T_{набл} = \frac{(\bar{x} - m_0)\cdot\sqrt{n}}{S} = \frac{(28{,}6 - 30)\sqrt{25}}{4{,}2} = -1{,}67.$$

2) по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. Приложение 2) определяем критическое значение критерия $t_{крит}$=2,06 для двусторонней критической области в зависимости от уровня значимости α=0,05 и числа степеней свободы $k=n$-1=25-1=24.

3) Так как $|T_{набл}| < t_{крит}$, то нулевая гипотеза принимается.

б) H_o: $M(X)$=30 мин.

H_1: $M(X)$< 30 мин.

В этом случае строят **левостороннюю критическую область**.

Порядок проверки нулевой гипотезы:

1) определяем наблюдаемое значение критерия $T_{набл}$=-1,67.

2) по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. Приложение 2) определяем критическое значение критерия $t_{крит}$=1,71 для односторонней критической области в зависимости от уровня значимости α=0,05 и числа степеней свободы $k=n$-1=25-1=24.

3) Так как $T_{набл} = -1{,}67 > -t_{крит} = -1{,}71$, то H_o принимается.

Таким образом, с вероятностью 0,95 можно утверждать, что выборочное среднее и математическое ожидание (генеральное среднее) различаются незначимо и, следовательно, утверждение производителей аспирина о том, что это лекарство излечивает головную боль за 30 мин, справедливо.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка n=100. Определена выборочная средняя 27,56. Среднее квадратическое отклонение известно и равно 5,2. Проверить нулевую гипотезу о том, что математическое ожидание равно 26 при уровне значимости 0,05.
2. По выборке объема n=16, извлеченной из генеральной совокупности нормальной случайной величины, найдена выборочная средняя 118, 2 и стандартное отклонение S=3,6. Проверить нулевую гипотезу при уровне значимости 0,05 о том, что математическое ожидание равно: а) 120: б) 118.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте основные принципы проверки гипотез.
2. Как проверяется гипотеза о равенстве выборочной средней с математическим ожиданием, если дисперсия известна?
3. Как проверяется гипотеза о равенстве выборочной средней с математическим ожиданием, если дисперсия неизвестна?

Приложение 1

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,00	0,0000	0,42	0,1628	0,84	0,2995	1,26	0,3969
0,01	0,0040	0,43	0,1664	0,85	0,3023	1,27	0,3980
0,02	0,0080	0,44	0,1700	0,86	0,3051	1,28	0,3997
0,03	0,0120	0,45	0,1736	0,87	0,3078	1,29	0,4015
0,04	0,0160	0,46	0,1772	0,88	0,3106	1,30	0,4032
0,05	0,0199	0,47	0,1808	0,89	0,3133	1,31	0,4049
0,06	0,0239	0,48	0,1844	0,90	0,3159	1,32	0,4066
0,07	0,0279	0,49	0,1879	0,91	0,3186	1,33	0,4082
0,08	0,0319	0,50	0,1915	0,92	0,3212	1,34	0,4099
0,09	0,0359	0,51	0,1950	0,93	0,3238	1,35	0,4115
0,10	0,0398	0,52	0,1985	0,94	0,3264	1,36	0,4131
0,11	0,0438	0,53	0,2019	0,95	0,3289	1,37	0,4147
0,12	0,0478	0,54	0,2054	0,96	0,3315	1,38	0,4162
0,13	0,0517	0,55	0,2088	0,97	0,3340	1,39	0,4177
0,14	0,0557	0,56	0,2123	0,98	0,3365	1,40	0,4192
0,15	0,0596	0,57	0,2157	0,99	0,3389	1,41	0,4207
0,16	0,0636	0,58	0,2190	1,00	0,3413	1,42	0,4222
0,17	0,0675	0,59	0,2224	1,01	0,3438	1,43	0,4236
0,18	0,0714	0,60	0,2257	1,02	0,3461	1,44	0,4251
0,19	0,0753	0,61	0,2291	1,03	0,3485	1,45	0,4265
0,20	0,0793	0,62	0,2324	1,04	0,3508	1,46	0,4279
0,21	0,0832	0,63	0,2357	1,05	0,3531	1,47	0,4292
0,22	0,0871	0,64	0,2389	1,06	0,3554	1,48	0,4306
0,23	0,0910	0,65	0,2422	1,07	0,3577	1,49	0,4319
0,24	0,0948	0,66	0,2454	1,08	0,3599	1,50	0,4332
0,25	0,0987	0,67	0,2486	1,09	0,3621	1,51	0,4345
0,26	0,1026	0,68	0,2517	1,10	0,3643	1,52	0,4357
0,27	0,1064	0,69	0,2549	1,11	0,3665	1,53	0,4370
0,28	0,1103	0,70	0,2580	1,12	0,3686	1,54	0,4382
0,29	0,1141	0,71	0,2611	1,13	0,3708	1,55	0,4394
0,30	0,1179	0,72	0,2642	1,14	0,3729	1,56	0,4406
0,31	0,1217	0,73	0,2673	1,15	0,3749	1,57	0,4418
0,32	0,1255	0,74	0,2703	1,16	0,3770	1,58	0,4429
0,33	0,1293	0,75	0,2734	1,17	0,3790	1,59	0,4441
0,34	0,1331	0,76	0,2764	1,18	0,3810	1,60	0,4452
0,35	0,1368	0,77	0,2794	1,19	0,3830	1,61	0,4463
0,36	0,1406	0,78	0,2823	1,20	0,3849	1,62	0,4474
0,37	0,1443	0,79	0,2852	1,21	0,3869	1,63	0,4484
0,38	0,1480	0,80	0,2881	1,22	0,3883	1,64	0,4495
0,39	0,1517	0,81	0,2910	1,23	0,3907	1,65	0,4505
0,40	0,1554	0,82	0,2939	1,24	0,3925	1,66	0,4515
0,41	0,1591	0,83	0,2967	1,25	0,3944	1,67	0,4525

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
1,68	0,4535	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969
1,69	0,4545	1,92	0,4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971
1,70	0,4554	1,93	0,4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,71	0,4564	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974
1,72	0,4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0,4582	1,96	0,4750	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0,4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0,4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0,4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0,4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0,4625	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0,4633	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0,4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,81	0,4649	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0,4664	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0,4671	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0,4678	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
1,86	0,4686	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0,4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		

Приложение 2

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы *k*	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)	
	0,1	0,05
1	6,31	12,70
2	2,92	4,30
3	2,35	3,18
4	2,13	2,78
5	2,01	2,57
6	1,94	2,45
7	1,89	2,36
8	1,86	2,31
9	1,83	2,26
10	1,81	2,23
	0,05	0,025
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)	