МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Составители: Ю.Б. Егорова
И.М. Мамонов
А.В. Челпанов

МОСКВА 2019

1. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1.1. Нормальный закон распределения (закон Гаусса) наиболее часто встречается на практике. Он появляется в тех случаях, когда непрерывная случайная величина является результатом влияния большого числа факторов.

Примеры случайных величин, имеющих нормальный закон распределения: ошибки измерений; отклонения при стрельбе; отклонение размеров деталей от номинальных при их изготовлении; рост, вес людей; температура воздуха, тела, объекта и т.п.

1.2. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения) имеет вид:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m и σ - параметры нормального распределения: $m=M(X)$ - математическое ожидание случайной величины X, $\sigma=\sigma(X)$ - среднее квадратическое отклонение.

Если параметры распределения известны, функция $f_N(x)$ полностью определена. Для сокращенной записи того, что **непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ,** принято условное обозначение $\boldsymbol{X \sim N(m,\sigma)}$.

График функции $f_N(x)$ называется нормальной кривой или кривой Гаусса (рис.1).

Функция $f_N(x)$ и нормальная кривая имеют следующие свойства:

1) Область определения функции $f_N(x)$ - вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$;
2) Функция $f_N(x)$ может принимать только положительные значения: $f_N(x)>0$, т.е. нормальная кривая расположена над осью $0x$;
3) Ось $0x$ - горизонтальная асимптота нормальной кривой;

4) Нормальная кривая симметрична относительно прямой $x=m$;
5) При $x=m$ нормальная кривая имеет максимум:

$$f_N(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,3989}{\sigma}.$$

6) При $x_n=m\pm\sigma$ нормальная кривая имеет перегиб:

$$f_N(x_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \approx \frac{0,2420}{\sigma}.$$

1.3. Интегральная функция распределения вероятностей нормальной случайной величины:

$$F_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

График функции $F_N(x)$ приведен на рис.2.

Свойства интегральной функции распределения нормальной случайной величины:

1) Функция $F_N(x)$ есть неубывающая и непрерывная функция;
2) Функция $F_N(x)$ есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей: $0 \le F_N(x) \le 1$;
3) $F_N(-\infty) = 0$; $F_N(+\infty) = 1$;
4) При $x=m$ функция $F_N(x)=0,5$.

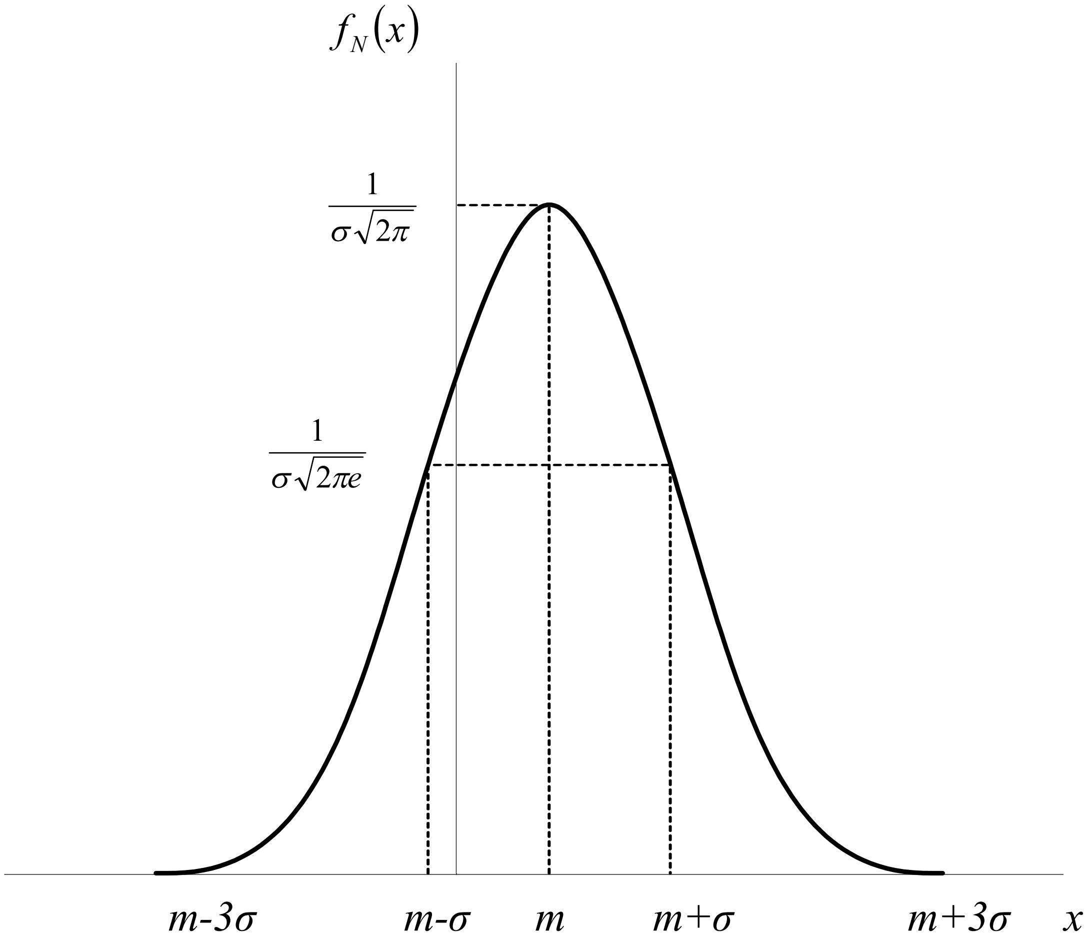


Рис.1. Нормальная кривая или кривая Гаусса (график плотности распределения вероятностей случайной величины, имеющей нормальный закон распределения)

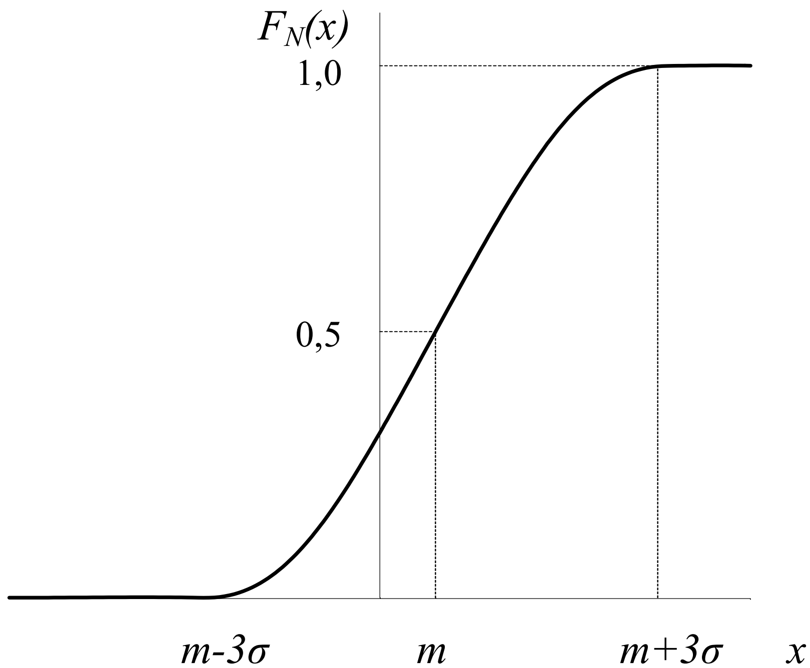


Рис. 2. График интегральной функции распределения вероятностей для случайной величины $X \sim N(m;\sigma)$

1.4. Числовые характеристики нормальной случайной величины:

Математическое ожидание, мода и **медиана** совпадают и равны m:

$$M(X)=Mo=Me=m.$$

Дисперсия $D(X)=\sigma^2$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sigma$.

Коэффициент ассиметрии $A=0$.

Коэффициент эксцесса $\varepsilon=3$, **эксцесс** $E=\varepsilon-3=0$.

1.5. Вероятность попадания в заданный интервал: вероятность того, что нормальная случайная величина X попадет в заданный интервал (α,β), равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(z)$ - функция Лапласа. Свойства функции Лапласа приведены ниже (см. п.2).

1.6. Вероятность заданного отклонения: вероятность того, что нормальная случайная величина X отклонится от математического ожидания на величину, меньшую δ, равна:

$$P(|X-m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

1.7. Правило «3σ». Если случайная величина X имеет нормальный закон распределения, то практически достоверно, что все ее значения находятся в "трех-σ" интервале $(m-3\sigma,\ m+3\sigma)$:

$$P(|X-m| < 3\sigma) = 0{,}9973.$$

ПРИМЕР 1. Найти интегральную и дифференциальную функции распределения, если непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами: $m=3$, $\sigma=4$. Построить нормальную кривую и график интегральной функции распределения. Найти числовые характеристики.

Решение. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения) имеет вид:

$$f_N(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}.$$

Интегральная функция распределения:

$$F_N(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}dx.$$

Для построения нормальной кривой используем свойства функции $f_N(x)$ и правило «3σ» :

1) Область определения функции $f_N(x)$ - вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$.
2) Так как функция $f_N(x)$ может принимать только положительные значения $f_N(x)>0$, то нормальная кривая расположена над осью $0x$.
3) Ось $0x$ - горизонтальная асимптота нормальной кривой.
4) Нормальная кривая симметрична относительно прямой $x=m=3$.
5) Приблизительно все значения x заключены в трехсигмовом интервале: $[m-3\sigma; m+3\sigma]=[3-3\cdot4; 3+3\cdot4]=[-9; 15]$.
6) При $x=m=3$ нормальная кривая имеет максимум:

$$f_N(m)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\approx\frac{0{,}3989}{4}=0{,}099.$$

7) При $x_n=m\pm\sigma=3\pm4=-1;7$ нормальная кривая имеет перегиб:

$$f_N(x_n)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\approx\frac{0{,}2420}{4}=0{,}0605.$$

График функции $f_N(x)$ (нормальная кривая) представлен на рис.3.

Для построения графика интегральной функции распределения используются свойства функции $F_N(x)$ и правило «3σ»:

1) Функция $F_N(x)$ есть неубывающая и непрерывная функция.
2) Функция $F_N(x)$ есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей: $0\le F_N(x)\le 1$.
3) $F_N(-\infty)=0$; $F_N(+\infty)=1$.
4) При $x=m=3$ функция $F_N(x)=0{,}5$.
5) Приблизительно все значения x заключены в трехсигмовом интервале: $[m-3\sigma; m+3\sigma]=[3-3\cdot4; 3+3\cdot4]=[-9; 15]$.

График функции $F_N(x)$ приведен на рис.4.

Числовые характеристики нормальной случайной величины:

Математическое ожидание, мода и медиана: $M(X)=Mo=Me=m=3$.

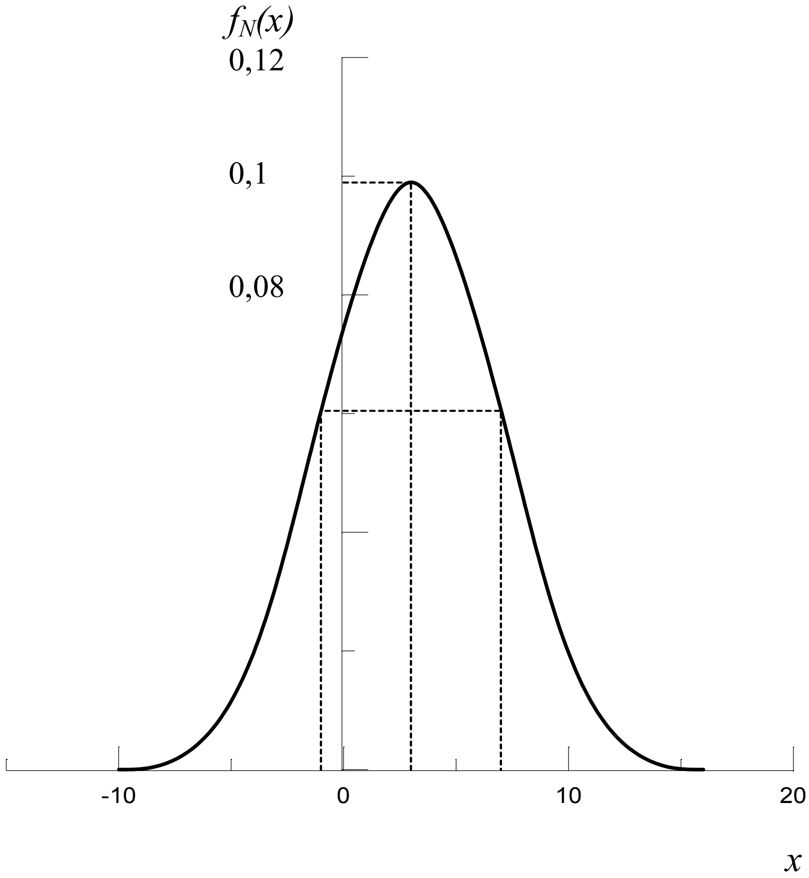


Рис. 3. Нормальная кривая для случайной величины X~N(3;4)

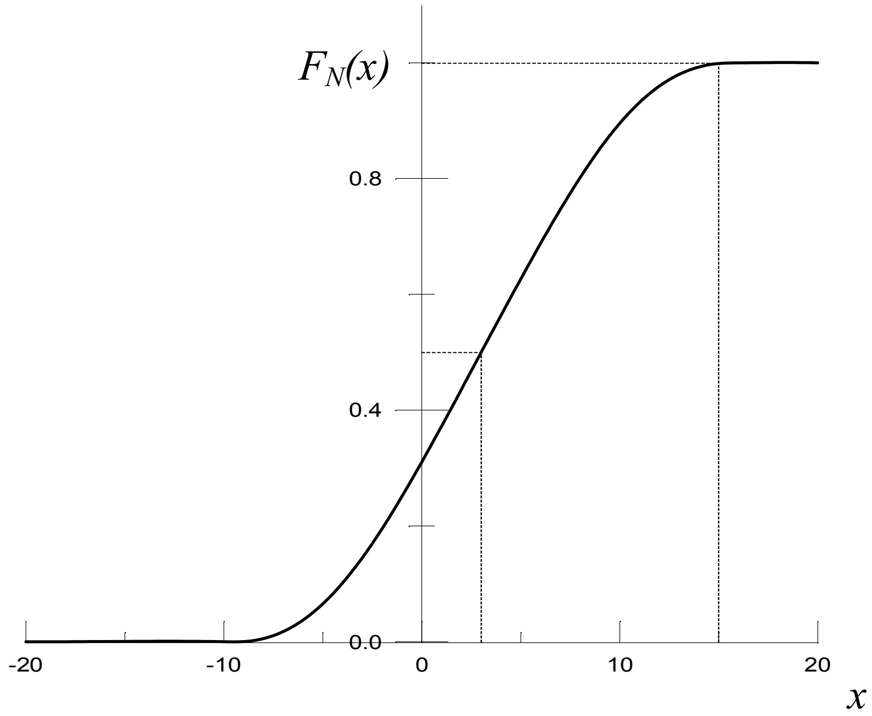


Рис. 4. График интегральной функции распределения вероятностей для случайной величины X~N(3;4)

Дисперсия $D(X) = \sigma^2 = 16$.
Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sigma = 4$.
Коэффициент ассиметрии $A=0$.
Коэффициент эксцесса $\varepsilon=3$, эксцесс $E=\varepsilon-3=0$.

2. ФУНКЦИЯ ЛАПЛАСА. ЕЕ СВОЙСТВА

2.1. Функция (интеграл вероятностей) Лапласа имеет вид:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

График функции Лапласа приведен на рис.5.

Функция $\Phi(x)$ табулирована (см. табл. 1 приложений). Для применения этой таблицы нужно знать **свойства функции Лапласа:**

1) Функция $\Phi(x)$ нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2) Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастающая.
3) $\Phi(0)=0$.
4) $\Phi(+\infty)=0,5$; $\Phi(-\infty)=-0,5$. На практике можно считать, что при $x \geq 5$ функция $\Phi(x)=0,5$; при $x \leq -5$ функция $\Phi(x)=-0,5$.

2.2. Существует другие формы функции Лапласа:

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\Phi}}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz.$$

В отличие от этих форм функция $\Phi(x)$ называется стандартной или нормированной функцией Лапласа. Она связана с другими формами соотношениями:

$$\Phi(x) = 0,5\overline{\Phi}(x); \quad \Phi(x) = 0,5\overline{\overline{\Phi}}(x/\sqrt{2}).$$

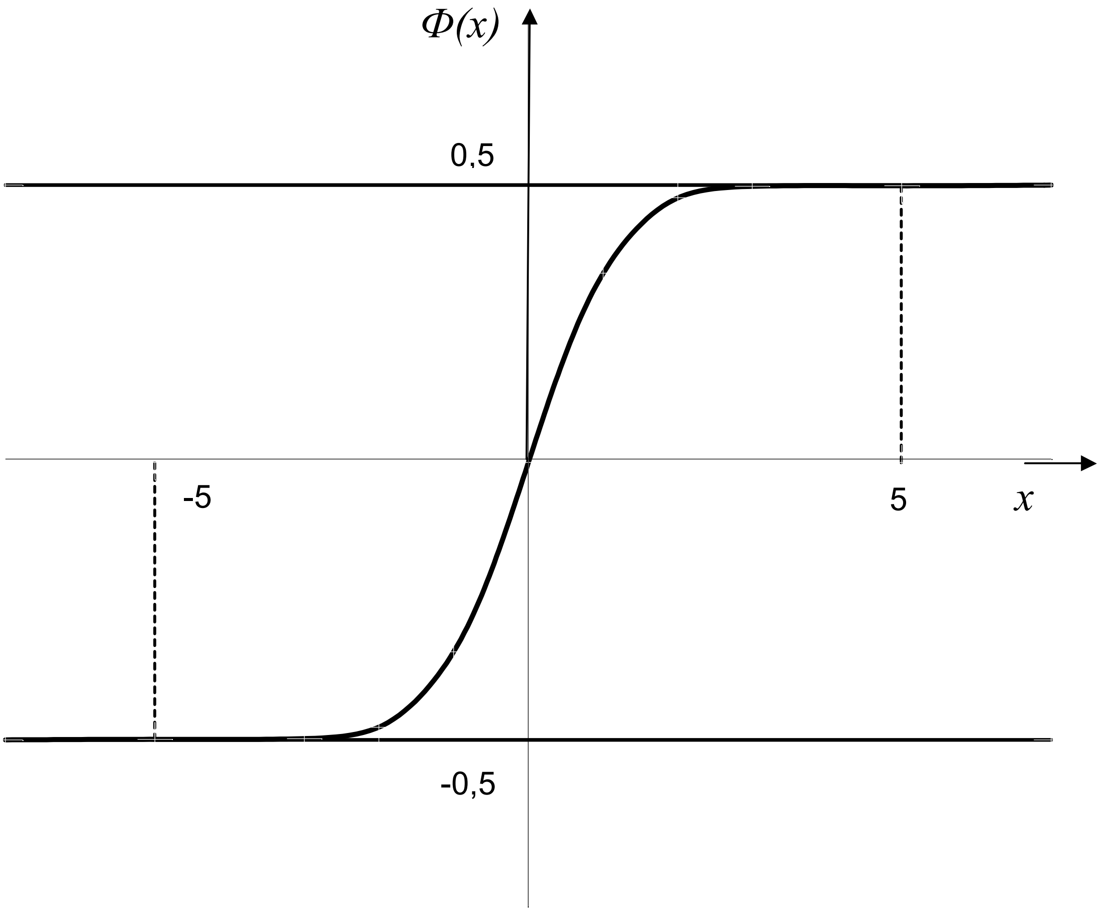


Рис. 5. График функции Лапласа

ПРИМЕР 2. Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами: m=3, σ=4. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X: а) примет значение, заключенное в интервале (2; 6); б) примет значение, меньше 2; в) примет значение, больше 10; г) отклонится от математического ожидания на величину, не превышающую 2. Проиллюстрировать решение задачи графически.

Решение. а) Вероятность того, что нормальная случайная величина X попадет в заданный интервал (α,β), где α=2 и β=6, равна:

$$P(2 < X < 6) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{6-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{4}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}75) - \Phi(-0{,}25) = \Phi(0{,}75) + \Phi(0{,}25) = 0{,}2734 + 0{,}0987 = 0{,}3721.$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ определяют по таблице, приведенной в приложении, учитывая, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

б) Вероятность того, что нормальная случайная величина X примет значение меньше 2, равна:

$$P(X < 2) = P(-\infty < X < 2) = \Phi\left(\frac{2-3}{4}\right) - \Phi(-\infty) = -\Phi(0{,}25) - \Phi(-\infty) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(0{,}25) = 0{,}5 - 0{,}0987 = 0{,}4013.$$

в) Вероятность того, что нормальная случайная величина X примет значение больше 10, равна:

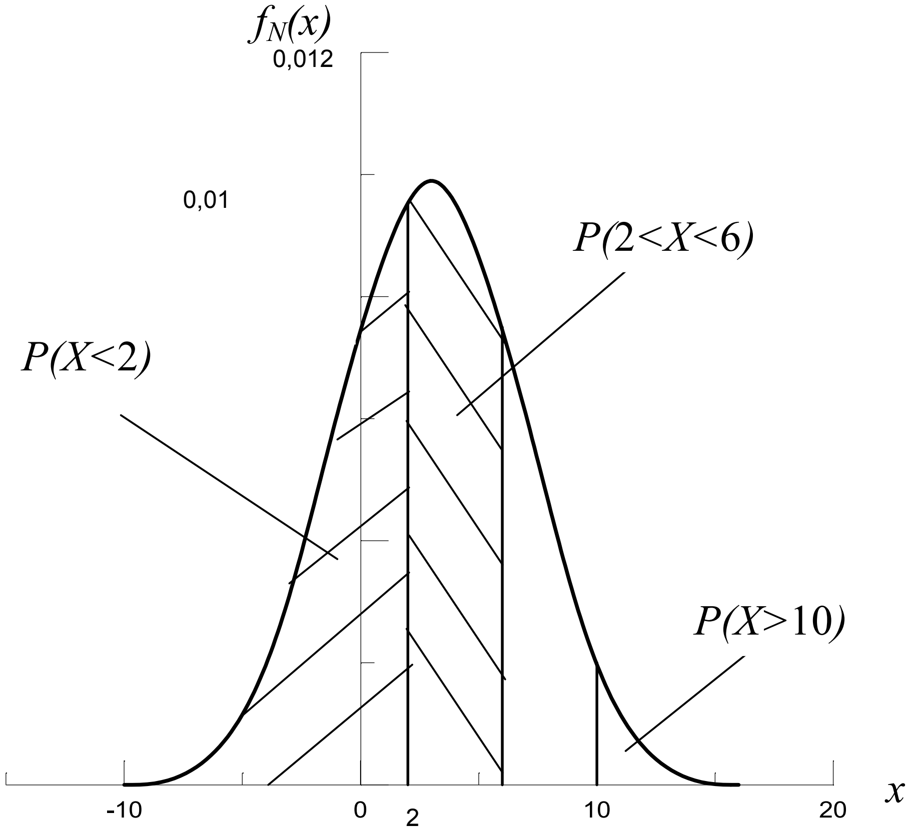
$$P(X > 10) = P(10 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{10-3}{4}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi(1{,}75) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}4599 = 0{,}0401.$$

г) Вероятность того, что нормальная случайная величина X отклонится от математического ожидания на величину, меньшую δ=2, равна:

$$P(|X - m| < 2) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{4}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383.$$

С геометрической точки зрения, вычисленные вероятности численно равны заштрихованным площадям под нормальной кривой (см. рис.6).



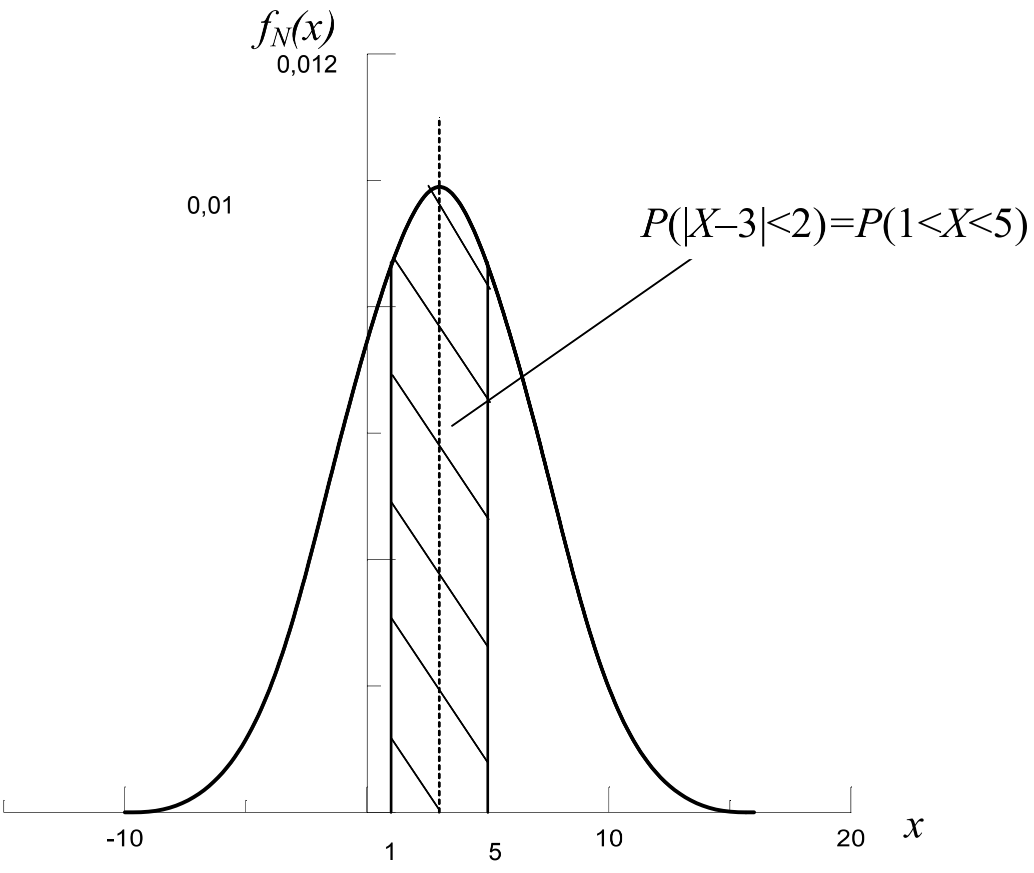


Рис. 6. Нормальная кривая для случайной величины X~N(3;4)

ПРИМЕР 3. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 10 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 15 мм.

Решение. Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю m=0. Тогда вероятность того, что нормальная случайная величина X отклонится от математического ожидания на величину, меньшую δ=15, равна:

$$P(|X|<15)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{15}{10}\right)=2\Phi(1{,}5)=2\cdot 0{,}4332=0{,}8664.$$

ПРИМЕР 4. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением 0,4 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди 100 изготовленных.

Решение. Случайная величина X - отклонение диаметра шарика от проектного размера. Математическое ожидание отклонения равно нулю, т.е. $M(X)=m=0$. Тогда вероятность того, что нормальная случайная величина X отклонится от математического ожидания на величину, меньшую δ=0,7, равна:

$$P(|X|<0{,}7)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right)=2\Phi(1{,}75)=2\cdot 0{,}4599=0{,}92.$$

Отсюда следует, что примерно 92 шарика из 100 окажутся годными.

ПРИМЕР 5. Доказать правило «3σ».

Решение. Вероятность того, что нормальная случайная величина X отклонится от математического ожидания на величину, меньшую $\delta=3\sigma$, равна:

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

ПРИМЕР 6. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием m=10. Вероятность попадания X в интервал (10, 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0, 10)?

Решение. Нормальная кривая симметрична относительно прямой x=m=10, поэтому площади, ограниченные сверху нормальной кривой и снизу интервалами (0, 10) и (10, 20), равны между собой. Так как площади численно равны вероятностям попадания X в соответствующий интервал, то:

$$P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0{,}3.$$

3. НОРМИРОВАННЫЙ (СТАНДАРТНЫЙ) НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

3.1. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения) имеет вид:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Для сокращенной записи того, что **непрерывная случайная величина *X* имеет нормированный (стандартный) нормальный закон распределения с параметрами *m*=0 и σ=1** , принято условное обозначение ***X~N(0,1).***

График функции $f_0(x)$ называется нормированной нормальной кривой, кривой ошибок или просто стандартной кривой (рис.7).

Функция $f_0(x)$ и стандартная кривая имеют следующие **свойства**:

1) Область определения функции $f_0(x)$ - вся числовая ось ($-\infty$; $+\infty$).
2) Функция $f_0(x)$ может принимать только положительные значения: $f_0(x)>0$, т.е. стандартная кривая расположена над осью $0X$.
3) Ось $0X$ - горизонтальная асимптота стандартной кривой.
4) Стандартная кривая симметрична относительно прямой $x=0$.
5) При $x=m=0$ стандартная кривая имеет максимум:

$$f_0(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989.$$

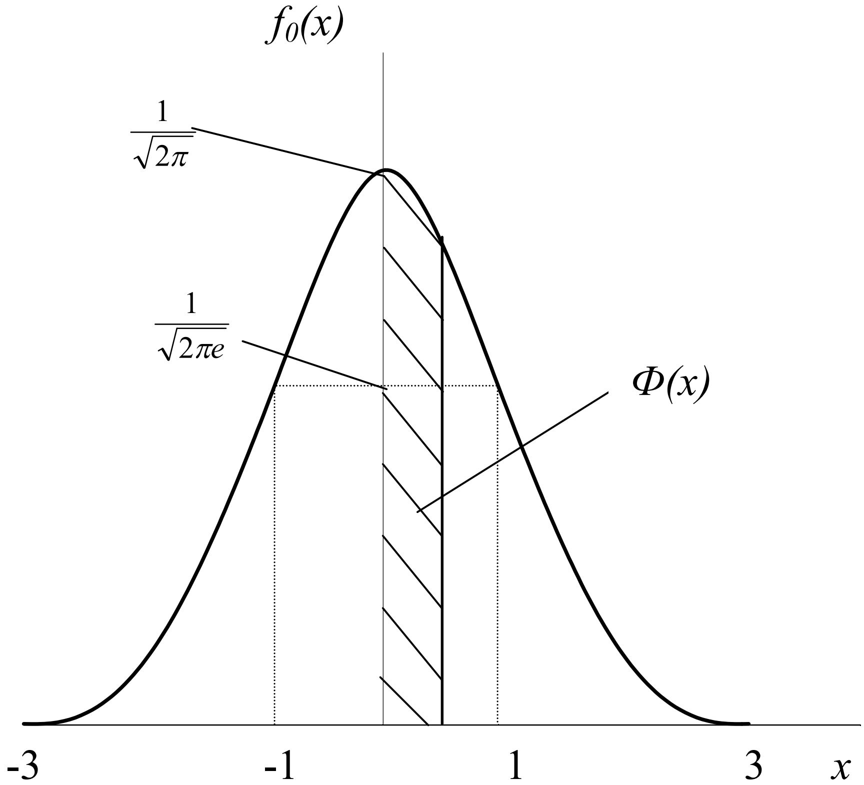


Рис.7. Стандартная (нормированная) кривая (график плотности распределения вероятностей случайной величины, имеющей нормированное нормальное распределение)

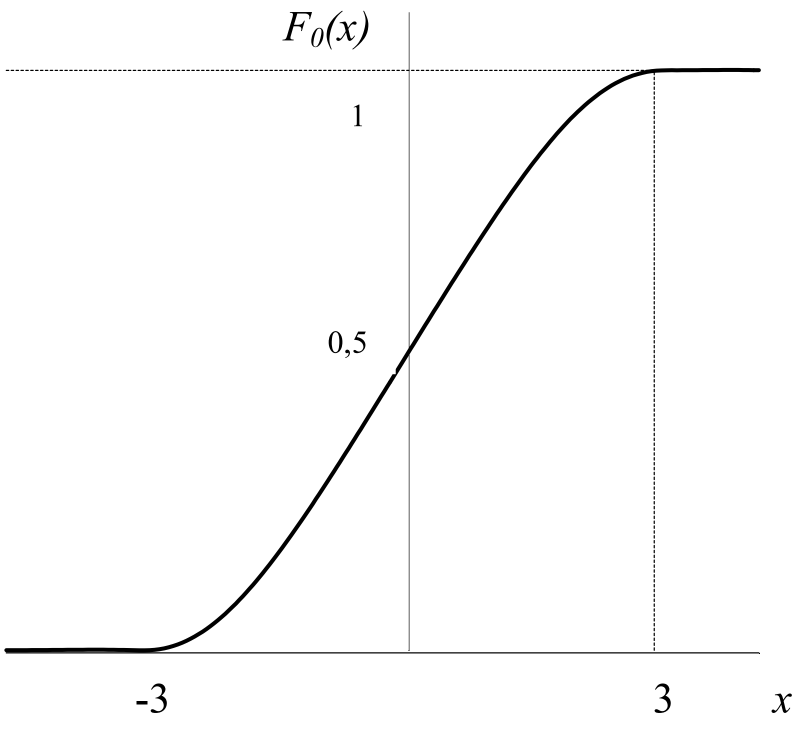


Рис.8. График интегральной функции распределения вероятностей случайной величины, имеющей нормированное нормальное распределение

6) При $x_n = m \pm \sigma = \pm 1$ нормальная кривая имеет перегиб:

$$f_0(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0{,}2420.$$

3.2. Интегральная функция распределения нормированной нормальной случайной величины:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

График функции $F_0(x)$ приведен на рис.8. При x=0 функция $F_0(x)$=0,5.

3.3. Числовые характеристики нормированной нормальной случайной величины:

Математическое ожидание, мода и **медиана** совпадают и равны нулю:

$$M(X) = Mo = Me = 0.$$

Дисперсия $D(X) = \sigma^2 = 1$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sigma = 1$.

Коэффициент ассиметрии A=0**.**

Коэффициент эксцесса ε=3, **эксцесс** $E = \varepsilon - 3 = 0$.

3.4. Свойства нормированной нормальной случайной величины:

1) Вероятность попадания нормированной нормальной случайной величины X в интервал (0;x) равна функции Лапласа (рис.7):

$$P(0 < X < x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x).$$

Геометрически функция Лапласа представляет собой заштрихованную площадь под стандартной кривой на отрезке (0; x).

2) Интегральная функция распределения случайной величины, имеющей нормированное нормальное распределение, выражается через функцию Лапласа по формуле:

$$F_0(x)=0{,}5+\Phi(x).$$

Геометрически (рис. 9) интегральная функция распределения представляет собой заштрихованную площадь под стандартной кривой на интервале (-∞; x). Она состоит из двух частей: первой, на интервале (-∞; 0), равной 0,5, т.е. половине всей площади под стандартной кривой, и второй, на интервале (0; x), равной функции Лапласа.

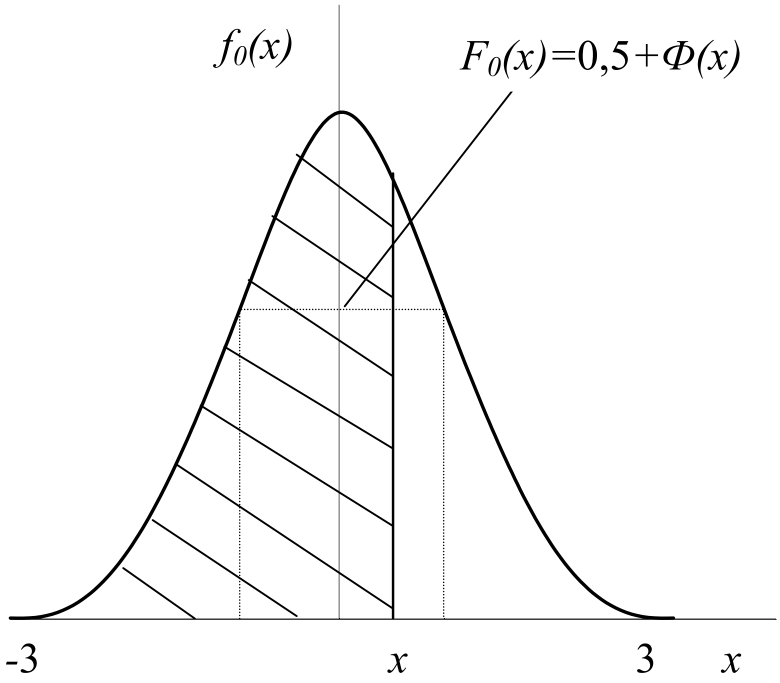


Рис. 9. Стандартная кривая с заштрихованной площадью, численно равной интегральной функции распределения $F_0(x)$

3) Любую нормальную случайную величину можно преобразовать в нормированную:
если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ, то случайная величина $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ имеет нормированное (стандартное) нормальное распределение с параметрами m=0 и σ=1.

ПРИМЕР 7. Доказать, что если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ, то нормированная случайная величина $z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ имеет параметры распределения m=0 и σ=1.

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z:

$$M(Z) = M\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\left(M(X) - M(m)\right) = \frac{1}{\sigma}(m-m) = 0.$$

$$D(Z) = D\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(D(X) + D(\sigma)\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma^2 - 0\right) = 1.$$

$$\sigma = \sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = 1.$$

При решении примера 7 использованы свойства математического ожидания и дисперсии, которые более подробно рассмотрены в методических указаниях [5]:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C)=C$.
2. Математическое ожидание суммы (разности) случайных величин равно сумме (разности) их математических ожиданий: $M(X \pm У)=M(X) \pm M(У)$.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=CM(X)$.
4. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0$.
5. Дисперсия суммы (разности) случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X \pm У)=D(X)+D(У)$.
6. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(CX)=C^2D(X)$.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно 3. Среднее квадратическое отклонение равно 2. Написать плотность распределения вероятности и интегральную функцию распределения вероятности случайной величины X. Найти дисперсию, моду, медиану, коэффициент асимметрии и эксцесс.

2. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f_N(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}.$$

   Найти интегральную функцию распределения вероятностей, определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить нормальную кривую.

3. Параметры нормально распределенной случайной величины X равны m=20 и σ=5. Найти интегральную и дифференциальную функции распределения. Построить их графики. Найти числовые характеристики. Определить вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15;25). Проиллюстрировать решение задачи графически.

4. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектной длиной), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм. Проиллюстрировать решение задачи графически. (Указание: из равенства $P(32<X<68)=1$ предварительно найти σ).

5. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчине-

ны нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г. Проиллюстрировать решение задачи графически.

6. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону с параметрами m=0 мм и σ=5 мм. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

7. Случайная величина X (длина детали) распределена нормально с математическим ожиданием 25 мм. Вероятность попадания X в интервал (10;15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35;40)? Проиллюстрировать решение задачи схематически.

8. Параметры нормально распределенной случайной величины X (диаметр валиков) равны m=10 мм и σ=0,1 мм. Написать интегральную и дифференциальную функции распределения. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков. Как называется этот интервал?

9. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметром σ=5. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.

10. Непрерывная случайная величина X имеет нормированный нормальный закон распределения. Найти «3σ»-интервал. Определить вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал (1;3). Проиллюстрировать решение задачи графически.

11. Отклонение стрелки компаса из-за влияния магнитного поля в определенной области Заполярья есть случайная величина $X\sim N(0;1)$. Чему равна вероятность того, что абсолютная величина отклонения стрелки компаса в определенный момент времени будет больше, чем 2,4? Проиллюстрировать решение задачи графически.

12. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с параметрами m=785 т и σ=60 т. Найти вероятность того, что в определенный день будут добыты: а) по крайней мере 800 т угля; б) менее 665 т.

13. Вес грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, – нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,04 кг^2. Агрономы знают, что 65% фруктов весят меньше, чем 0,5 кг. Найти ожидаемый вес случайно выбранного грейпфрута.

14. Вес товаров в контейнерах – есть нормально распределенная случайная величина. Известно, что 65% контейнеров с товаром имеют вес больше, чем 4,9 т, а 25% – имеют вес меньше, чем 4,2 т. Найти ожидаемый средний вес и среднее квадратическое отклонение веса контейнера.

15. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону с параметрами m=0 и σ=20 мм. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая величина называется случайной?
2. Дайте определение непрерывной случайной величины.
3. Что называется законом распределения непрерывной случайной величины?
4. Дайте определение дифференциальной и интегральной функции распределения вероятностей.
5. Какое распределение вероятностей называется нормальным?
6. Сформулируйте свойства дифференциальной функции (плотности) распределения вероятностей нормальной случайной величины X.
7. Сформулируйте свойства интегральной функции распределения вероятностей нормальной случайной величины X.
8. Чему равны числовые характеристики случайной величины, имеющей нормальное распределение?
9. Сформулируйте правило «3σ».
10. Сформулируйте свойства функции Лапласа.
11. Как можно найти вероятность попадания нормальной случайной величины X в заданный интервал (α, β)?
12. Как можно найти вероятность заданного отклонения δ нормальной случайной величины X от ее математического ожидания?
13. Какое распределение вероятностей называется нормальным нормированным распределением?
14. Чему равны числовые характеристики случайной величины, имеющей нормированное нормальное распределение?
15. Приведите примеры случайных величин, имеющих нормальное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк. 2001.– 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – 5-е изд., стер.– М.: Высш. шк. 2001. – 400 с.
3. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1991. – 157 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 . – 543 с.
5. Егорова Ю.Б., Мамонов И.М., Корниенко Л.И. Дискретные случайные величины. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика». – М.: Издательский центр МАТИ, 2005. – 20 с.

Приложение

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,42	0,1628	0,84	0,2995	1,26	0,3969
0,01	0,0040	0,43	0,1664	0,85	0,3023	1,27	0,3980
0,02	0,0080	0,44	0,1700	0,86	0,3051	1,28	0,3997
0,03	0,0120	0,45	0,1736	0,87	0,3078	1,29	0,4015
0,04	0,0160	0,46	0,1772	0,88	0,3106	1,30	0,4032
0,05	0,0199	0,47	0,1808	0,89	0,3133	1,31	0,4049
0,06	0,0239	0,48	0,1844	0,90	0,3159	1,32	0,4066
0,07	0,0279	0,49	0,1879	0,91	0,3186	1,33	0,4082
0,08	0,0319	0,50	0,1915	0,92	0,3212	1,34	0,4099
0,09	0,0359	0,51	0,1950	0,93	0,3238	1,35	0,4115
0,10	0,0398	0,52	0,1985	0,94	0,3264	1,36	0,4131
0,11	0,0438	0,53	0,2019	0,95	0,3289	1,37	0,4147
0,12	0,0478	0,54	0,2054	0,96	0,3315	1,38	0,4162
0,13	0,0517	0,55	0,2088	0,97	0,3340	1,39	0,4177
0,14	0,0557	0,56	0,2123	0,98	0,3365	1,40	0,4192
0,15	0,0596	0,57	0,2157	0,99	0,3389	1,41	0,4207
0,16	0,0636	0,58	0,2190	1,00	0,3413	1,42	0,4222
0,17	0,0675	0,59	0,2224	1,01	0,3438	1,43	0,4236
0,18	0,0714	0,60	0,2257	1,02	0,3461	1,44	0,4251
0,19	0,0753	0,61	0,2291	1,03	0,3485	1,45	0,4265
0,20	0,0793	0,62	0,2324	1,04	0,3508	1,46	0,4279
0,21	0,0832	0,63	0,2357	1,05	0,3531	1,47	0,4292
0,22	0,0871	0,64	0,2389	1,06	0,3554	1,48	0,4306
0,23	0,0910	0,65	0,2422	1,07	0,3577	1,49	0,4319
0,24	0,0948	0,66	0,2454	1,08	0,3599	1,50	0,4332
0,25	0,0987	0,67	0,2486	1,09	0,3621	1,51	0,4345
0,26	0,1026	0,68	0,2517	1,10	0,3643	1,52	0,4357
0,27	0,1064	0,69	0,2549	1,11	0,3665	1,53	0,4370
0,28	0,1103	0,70	0,2580	1,12	0,3686	1,54	0,4382
0,29	0,1141	0,71	0,2611	1,13	0,3708	1,55	0,4394
0,30	0,1179	0,72	0,2642	1,14	0,3729	1,56	0,4406
0,31	0,1217	0,73	0,2673	1,15	0,3749	1,57	0,4418
0,32	0,1255	0,74	0,2703	1,16	0,3770	1,58	0,4429
0,33	0,1293	0,75	0,2734	1,17	0,3790	1,59	0,4441
0,34	0,1331	0,76	0,2764	1,18	0,3810	1,60	0,4452
0,35	0,1368	0,77	0,2794	1,19	0,3830	1,61	0,4463
0,36	0,1406	0,78	0,2823	1,20	0,3849	1,62	0,4474
0,37	0,1443	0,79	0,2852	1,21	0,3869	1,63	0,4484
0,38	0,1480	0,80	0,2881	1,22	0,3883	1,64	0,4495
0,39	0,1517	0,81	0,2910	1,23	0,3907	1,65	0,4505
0,40	0,1554	0,82	0,2939	1,24	0,3925	1,66	0,4515
0,41	0,1591	0,83	0,2967	1,25	0,3944	1,67	0,4525

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,68	0,4535	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969
1,69	0,4545	1,92	0,4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971
1,70	0,4554	1,93	0,4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,71	0,4564	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974
1,72	0,4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0,4582	1,96	0,4750	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0,4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0,4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0,4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0,4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0,4625	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0,4633	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0,4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,81	0,4649	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0,4664	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0,4671	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0,4678	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
1,86	0,4686	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0,4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов
Александр Витальевич Челпанов

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Уч.-изд.л. – 1,34.