МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

Тест на нормальность по критерию Пирсона

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине "Математическая статистика"

Составители: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2020

ВВЕДЕНИЕ

Цель практического занятия – изучить способы проведения теста на нормальность по критерию Пирсона.

ПРИМЕР 1. Исследуется случайная величина X – изменение выработки на одного рабочего механического цеха в отчетном году по сравнению с предыдущим. Получены данные по 100 рабочим цеха, на основании которых был составлен интервальный статистический ряд (табл. 3).

Таблица 3

Группированный статистический ряд

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7	8
Δx_i, %	94-100	100-106	106-112	112-118	118-124	124-130	130-136	136-142
Середина интервала x_i, %	97	103	109	115	121	127	133	139
n_i	3	7	11	20	28	19	10	2

С помощью критерия Пирсона при уровне значимости α =0,05 необходимо проверить нулевую гипотезу о том, что случайная величина X имеет нормальный закон распределения.

РЕШЕНИЕ.

Сначала определим следующие числовые характеристики:

выборочное среднее $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{n}.$; $\bar{x} = 119{,}2\%$,

выборочная дисперсия $D^*(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}.$; $D^*(X)$=87,48 $(\%)^2$,

выборочное среднее квадратическое отклонение

$\sigma^* = \sqrt{D^*(X)}$; $\sigma^*(X)$=9,35%.

Выдвигаем нулевую гипотезу H_o: случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $N(119{,}2;\ 9{,}35)$.

Выдвигаем альтернативную гипотезу H_1: случайная величина X не имеет нормального закона распределения с параметрами $N(119{,}2;\ 9{,}35)$.

Сначала определяем теоретические частоты по формуле:

$n_i^T = n \cdot p_i$, где p_i – вероятность попадания случайной величины X в i-интервал. Для расчета p_i используем функцию Лапласа (см. приложение 2):

$$p_i = P(\alpha < X < \beta) \cong \phi\left(\frac{\beta - \bar{x}}{\sigma *}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - \bar{x}}{\sigma *}\right) \approx$$

$$\approx \phi\left(\frac{\beta - 119{,}2}{9{,}35}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - 199{,}2}{9{,}35}\right),$$

где α и β – концы i-интервала.

Например:

$$p_1 = P(94 < X < 100) = \phi\left(\frac{100 - 119{,}2}{9{,}35}\right) - \phi\left(\frac{94 - 199{,}2}{9{,}35}\right) =$$

$$= \phi(-2{,}05) - \phi(-2{,}69) = -0{,}4798 + 0{,}4964 = 0{,}0166.$$

Для определения вероятностей, теоретических частот и критерия Пирсона удобно составить таблицу (см. табл.4). Частоты в первом и последнем восьмом интервале меньше 5, поэтому их целесообразно объединить с соседними.

Таблица 4

Вспомогательная таблица для расчета критерия Пирсона

<table>
<tr><th>№
i-интер-
вала</th><th>Интервал
Δx_i
[α÷β]</th><th colspan="2">Эмпирическ
ие
частоты
n_i</th><th>Вероятность попадания в i-интервал
p_i</th><th colspan="2">Теоретические частоты
$n_i^T = np_i$</th><th>$\frac{\left(n_i - n_i^T\right)^2}{n_i^T}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td colspan="2">3</td><td>4</td><td colspan="2">5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>94-100</td><td>3</td><td rowspan="2">10</td><td>0,017</td><td>1,7</td><td rowspan="2">7,6</td><td rowspan="2">0,758</td></tr>
<tr><td>2</td><td>100-106</td><td>7</td><td>0,059</td><td>5,9</td></tr>
<tr><td>3</td><td>106-112</td><td colspan="2">11</td><td>0,141</td><td colspan="2">14,1</td><td>0,682</td></tr>
<tr><td>4</td><td>112-118</td><td colspan="2">20</td><td>0,228</td><td colspan="2">22,8</td><td>0,344</td></tr>
<tr><td>5</td><td>118-124</td><td colspan="2">28</td><td>0,247</td><td colspan="2">24,7</td><td>0,441</td></tr>
<tr><td>6</td><td>124-130</td><td colspan="2">19</td><td>0,182</td><td colspan="2">18,2</td><td>0,035</td></tr>
<tr><td>7</td><td>130-136</td><td>10</td><td rowspan="2">12</td><td>0,087</td><td>8,7</td><td rowspan="2">11,6</td><td rowspan="2">0,14</td></tr>
<tr><td>8</td><td>136-142</td><td>2</td><td>0,029</td><td>2,9</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sum$</td><td colspan="2">100</td><td>≈1,0</td><td colspan="2">≈100</td><td>χ^2=2,27</td></tr>
</table>

Порядок проверки нулевой гипотезы:

1) Определяем наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = 2{,}27$. Для этого необходимо сложить числа в столбце 6 (см. табл.4).

2) Определяем критическое значение критерия $\chi^2_{крит}(\alpha, k)$ в зависимости от уровня значимости α=0,05 и числа степеней свободы k. Новое число интервалов (с учетом объединения крайних) s=6, поэтому число степеней свободы k=s–3=6–3=3. По таблице распределения Пирсона (см. Приложение 1) определяем $\chi^2_{крит}(\alpha, k) = \chi^2_{крит}(0{,}05;3) = 7{,}82$.

3) Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}(\alpha, k)$, то нулевая гипотеза принимается. Следовательно, гипотеза о нормальном законе распределения с параметрами N(119,2; 48) согласуется с опытными данными.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Используя критерий согласия Пирсона, проверить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i^T, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости 0,05:

а)

n_i	5	10	20	8	7
n_i^T	6	14	18	7	5

б)

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n_i^T	10	24	34	80	18	22	12

Приложение 1

Критические точки распределения Пирсона

Число степеней свободы k	χ^2 при уровне значимости α		
	0,01	0,025	0,05
1	6,6	5,0	3,8
2	9,2	7,4	6,0
3	11,3	9,4	7,8
4	13,3	11,1	9,5
5	15,1	12,8	11,1
6	16,8	14,4	12,6
7	18,5	16,0	14,1
8	20,1	17,5	15,5
9	21,7	19,0	16,9
10	23,2	20,5	18,3
11	24,7	21,9	19,7
12	26,2	23,3	21,0
13	27,7	24,7	22,4
14	29,1	26,1	23,7
15	30,6	27,5	25,0
16	32,0	28,8	26,3
17	33,4	30,2	27,6
18	34,8	31,5	28,9
19	36,2	32,9	30,1
20	37,6	34,2	31,4
21	38,9	35,5	32,7
22	40,3	36,8	33,9
23	41,6	38,1	35,2
24	43,0	39,4	36,4
25	44,3	40,6	37,7
26	45,6	41,9	38,9
27	47,0	43,2	40,1
28	48,3	44,5	41,3
29	49,6	45,7	42,6
30	50,9	47,0	43,8

Приложение 2

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,42	0,1628	0,84	0,2995	1,26	0,3969
0,01	0,0040	0,43	0,1664	0,85	0,3023	1,27	0,3980
0,02	0,0080	0,44	0,1700	0,86	0,3051	1,28	0,3997
0,03	0,0120	0,45	0,1736	0,87	0,3078	1,29	0,4015
0,04	0,0160	0,46	0,1772	0,88	0,3106	1,30	0,4032
0,05	0,0199	0,47	0,1808	0,89	0,3133	1,31	0,4049
0,06	0,0239	0,48	0,1844	0,90	0,3159	1,32	0,4066
0,07	0,0279	0,49	0,1879	0,91	0,3186	1,33	0,4082
0,08	0,0319	0,50	0,1915	0,92	0,3212	1,34	0,4099
0,09	0,0359	0,51	0,1950	0,93	0,3238	1,35	0,4115
0,10	0,0398	0,52	0,1985	0,94	0,3264	1,36	0,4131
0,11	0,0438	0,53	0,2019	0,95	0,3289	1,37	0,4147
0,12	0,0478	0,54	0,2054	0,96	0,3315	1,38	0,4162
0,13	0,0517	0,55	0,2088	0,97	0,3340	1,39	0,4177
0,14	0,0557	0,56	0,2123	0,98	0,3365	1,40	0,4192
0,15	0,0596	0,57	0,2157	0,99	0,3389	1,41	0,4207
0,16	0,0636	0,58	0,2190	1,00	0,3413	1,42	0,4222
0,17	0,0675	0,59	0,2224	1,01	0,3438	1,43	0,4236
0,18	0,0714	0,60	0,2257	1,02	0,3461	1,44	0,4251
0,19	0,0753	0,61	0,2291	1,03	0,3485	1,45	0,4265
0,20	0,0793	0,62	0,2324	1,04	0,3508	1,46	0,4279
0,21	0,0832	0,63	0,2357	1,05	0,3531	1,47	0,4292
0,22	0,0871	0,64	0,2389	1,06	0,3554	1,48	0,4306
0,23	0,0910	0,65	0,2422	1,07	0,3577	1,49	0,4319
0,24	0,0948	0,66	0,2454	1,08	0,3599	1,50	0,4332
0,25	0,0987	0,67	0,2486	1,09	0,3621	1,51	0,4345
0,26	0,1026	0,68	0,2517	1,10	0,3643	1,52	0,4357
0,27	0,1064	0,69	0,2549	1,11	0,3665	1,53	0,4370
0,28	0,1103	0,70	0,2580	1,12	0,3686	1,54	0,4382
0,29	0,1141	0,71	0,2611	1,13	0,3708	1,55	0,4394
0,30	0,1179	0,72	0,2642	1,14	0,3729	1,56	0,4406
0,31	0,1217	0,73	0,2673	1,15	0,3749	1,57	0,4418
0,32	0,1255	0,74	0,2703	1,16	0,3770	1,58	0,4429
0,33	0,1293	0,75	0,2734	1,17	0,3790	1,59	0,4441
0,34	0,1331	0,76	0,2764	1,18	0,3810	1,60	0,4452
0,35	0,1368	0,77	0,2794	1,19	0,3830	1,61	0,4463
0,36	0,1406	0,78	0,2823	1,20	0,3849	1,62	0,4474
0,37	0,1443	0,79	0,2852	1,21	0,3869	1,63	0,4484
0,38	0,1480	0,80	0,2881	1,22	0,3883	1,64	0,4495
0,39	0,1517	0,81	0,2910	1,23	0,3907	1,65	0,4505
0,40	0,1554	0,82	0,2939	1,24	0,3925	1,66	0,4515
0,41	0,1591	0,83	0,2967	1,25	0,3944	1,67	0,4525

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
1,68	0,4535	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969
1,69	0,4545	1,92	0,4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971
1,70	0,4554	1,93	0,4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,71	0,4564	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974
1,72	0,4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0,4582	1,96	0,4750	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0,4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0,4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0,4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0,4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0,4625	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0,4633	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0,4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,81	0,4649	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0,4664	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0,4671	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0,4678	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
1,86	0,4686	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0,4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		