МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Составители:
Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2019

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Случайная величина – величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное числовое значение.

Случайные величины обозначают прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения – строчными буквами x, y, z.

Случайные величины подразделяют на дискретные и непрерывные. В настоящих методических указаниях рассматриваются дискретные случайные величины.

1.2. Дискретная (прерывная) величина – величина, которая принимает отдельные, изолированные значения, т.е. между двумя соседними возможными значениями нет других значений. Другими словами, возможные значения дискретной случайной величины можно перенумеровать. Число возможных значений может быть конечным или бесконечным (в последнем случае множество всех возможных значений называют счетным).

1.3. Случайные величины задаются с помощью закона распределения. **Законом распределения** дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения дискретной случайной величины можно задать тремя способами: 1) таблицей; 2) графически; 3) аналитически.

1.3.1. При табличном задании закона распределения первая строка таблицы содержит возможные значения дискретной величины x_i, а вторая – их вероятности p_i:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Таблица называется **рядом распределения**. Сумма всех вероятностей равна единице: $p_1+p_2+\ldots+p_n = 1$.

1.3.2. При графическом способе задания в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками прямых (только для наглядности). Полученную фигуру называют **многоугольником распределения**.

ПРИМЕР 1. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти ряд распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Напишем возможные значения X: x_1=50, x_2=1, x_3=0. Вероятности этих возможных значений:

$$p_1=1/100=0{,}01;$$

$$p_2=10/100=0{,}1;$$

$$p_3=89/100=0{,}89.$$

Напишем ряд распределения :

X	50	1	0
P	0,01	0,1	0,89

Контроль: 0,01+0,1+0,89=1.

1.3.3. Функцией распределения случайной величины называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее заданного x, т.е. $F(x)=P(X<x)$. Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Свойства *F(x)*:

1. Функция $F(x)$ есть неубывающая функция;

2. Функция $F(x)$ есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей: $0 \le F(x) \le 1$;
3. $F(-\infty)=0$; $F(+\infty)=1$;
4. Вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал от α до β равна: $P(\alpha \le X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$.

Функцию распределения дискретной случайной величины X можно получить на основе ряда распределения. Тогда эта функция выражается следующей формулой:

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i). \qquad (1)$$

Символ $x_i<x$ под знаком суммы обозначает, что суммирование распространяется на все возможные значения случайной величины, которые по своей величине меньше аргумента x. Формулу (1) можно записать в следующем виде:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le x_1, \\ p_1 \text{ при } x_1<x\le x_2, \\ p_1+p_2 \text{ при } x_2<x\le x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 \text{ при } x>x_n. \end{cases}$$

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через точки возможных ее значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем величина скачка равна вероятности соответствующего значения. Сумма всех скачков равна единице.

ПРИМЕР 2. Дискретная величина X задана законом распределения:

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

Найти интегральную функцию $F(x)$ и начертить ее график.

Решение.

1. Если $x \le 2$, то $F(x)=0$. Действительно, значений, меньших числа 2, величина $F(x)$ не принимает. Следовательно, при $x \le 2$ функция $F(x)=P(X<x)=0$.

2. Если $2<x\le 4$, то $F(x)=0,5$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,5.

3. Если $4<x\le 7$, то $F(x)=0,7$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,5 и значение 4 с вероятностью 0,2. Следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью 0,5+0,2=0,7.

4. Если $x>7$, то $F(x)=1$. Действительно, событие $X\le 7$ достоверно и вероятность его равна единице.

Таким образом, искомая интегральная функция распределения дискретной величины X имеет вид:

$$F(x)=0 \text{ при } x\le 2;$$

$$F(x)=0,5 \text{ при } 2<x\le 4;$$

$$F(x)=0,7 \text{ при } 4<x\le 7;$$

$$F(x)=1 \text{ при } x>7.$$

График этой функции приведен на рис. 1.

В рассмотренном примере значения случайной величины разделены интервалами, внутри которых других возможных значений нет. Характерно, что на этих интервалах функция распределения постоянна, т.е. график функции распределения представляет собой ступенчатую разрывную линию.

Из графика видно, что при каждом новом значении случайной величины ступень поднимается на высоту, равную вероятности этого значения.

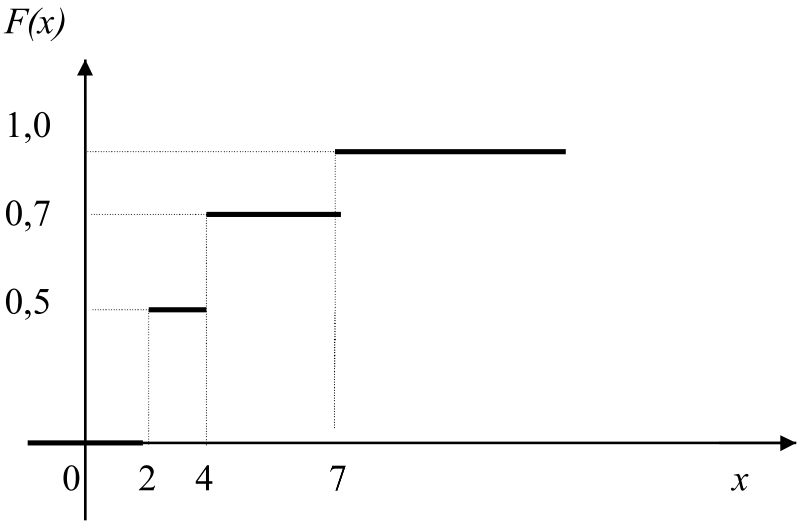

Рис. 1. График функции распределения $F(x)$

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Пусть случайная величина X имеет закон распределения:

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Случайная величина Y имеет закон распределения:

Y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Произведением случайной величины X на постоянную C называется случайная величина $Z=CX$, которая принимает значения $z_i=Cx_i$ с теми же вероятностями.

m-й степенью случайной величины X называется случайная величина $Z=X^m$, которая принимает значения $z_i=x_i^m$ с теми же вероятностями.

Суммой (разностью) случайных величин X и Y называется случайная величина $Z=X\pm Y$, которая принимает значения $z_i=x_i\pm y_i$ с вероятностями:

$$P(Z=z_i)=P[(X=x_i)\cdot(Y=y_i)].$$

Произведением случайных величин X и Y называется случайная величина $Z=XY$, которая принимает значения $z_i=x_i\cdot y_i$ с вероятностями:

$$P(Z=z_i)=P[(X=x_i)\cdot(Y=y_i)].$$

Если случайные величины X и Y независимы, то по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$\mathrm{P(Z=z_i)=P[(X=x_i)\cdot(Y=y_i)]=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_i)}.$$

ПРИМЕР 3. Два стрелка стреляют по мишени, разделенной на три области. Попадание в первую область дает стрелку 3 очка, во вторую – 2 очка, в третью – 1 очко. Делается один выстрел. Случайные величины X и Y – число очков, выбиваемых при одном выстреле первым и вторым стрелком, соответственно, – имеют законы распределения:

X	1	2	3
P	0	0,2	0,8

Y	1	2	3
P	0,2	0,5	0,3

Найти закон распределения для суммы очков, выбиваемых обоими стрелками.

Решение. Сумма очков, выбиваемых обоими стрелками, – случайная величина $Z=X+Y$. Рассмотрим все возможные результаты стрельбы двух стрелков. Для этого составим таблицу, в которой вероятность каждого результата вычисляется по правилу умножения вероятностей независимых событий X и Y, так как для того, чтобы произошло событие Z, необходимо, чтобы события X и Y произошли одновременно.

Таблица имеет следующий вид:

№ результата	x	y	$z= x+ y$	Вероятность результата
1	1	1	2	0·0,2=0
2	1	2	3	0·0,5=0
3	1	3	4	0·0,3=0
4	2	1	3	0,2·0,2=0,04
5	2	2	4	0,2·0,5=0,1
6	2	3	5	0,2·0,3=0,06
7	3	1	4	0,8·0,2=0,16
8	3	2	5	0,8·0,5=0,4
9	3	3	6	0,8·0,3=0,24

Таблица показывает, что $z= x+ y$ может принимать значения 2, 3, 4, 5 и 6:

z=2 в случае результата № 1, $P(z=2)=0$;

z=3 в случае результатов № 2 или № 4, поэтому, для того чтобы z получила значение 3, необходимо наступление одного из результатов № 2 или № 4; вероятность этого по правилу сложения вероятностей равна сумме вероятностей этих результатов: P(z=3)= 0+0,04=0,04;

z=4 в случае результатов или № 3, или № 5, или № 7, поэтому $P(z=4)=0+0,1+0,16=0,26$;

z=5 в случае результатов или № 6, или № 8, поэтому $P(z=5)=0,06+0,4=0,46$;

z=6 в случае результата № 9: $P(z=6)=0,24$.

Таким образом, для случайной величины $Z=X+Y$ получаем следующий ряд распределения:

$Z=X+Y$	2	3	4	5	6
$P(Z)$	0	0,04	0,26	0,46	0,24

Контроль: 0+0,04+0,26+0,46+0,24=1.

3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1. Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание. **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности: $M(X)= x_1p_1+ x_2p_2+\ldots+x_np_n$.

Свойства *M(X)*:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C)=C$.
2. Математическое ожидание суммы (разности) случайных величин равно сумме (разности) их математических ожиданий: $M(X\pm У)=M(X)\pm M(У)$.
3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XУ)=M(X)M(У)$.
4. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=CM(X)$.
5. Математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании равно вероятности этого события p.

ПРИМЕР 4. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

Решение. Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности:

$$M(X)= 3\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}3=3{,}9.$$

ПРИМЕР 5. Доказать, что математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании равно вероятности этого события p.

Решение. Случайная величина X – число появлений события A в одном испытании – может принимать только два значения: $x_1=1$ (событие A наступило) с вероятностью p и $x_2=0$ (событие A не наступило) с вероятностью $q=1-p$. Искомое математическое ожидание равно: $M(X)=1\cdot p+0\cdot q=p$.

3.2. Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

3.2.1. Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Свойства $\boldsymbol{D(X)}$:

1. Дисперсия есть величина неотрицательная: $D(X)\geq 0$.
2. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0$.
3. Дисперсия суммы (разности) случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X\pm У)=D(X)+D(У)$.
4. Дисперсия произведения взаимно независимых случайных величин равна произведению их дисперсий: $D(XУ)=D(X)D(У)$.
5. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(CX)=C^2D(X)$.
6. Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и

квадратом ее математического ожидания: $D(X)=M(X^2) - [M(X)]^2$. При расчетах дисперсию удобно вычислять по этой формуле.

3.2.2. Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

3.3. Мода *Мо* – наиболее вероятное значение, т.е. это значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность.

ПРИМЕР 6. Найти дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения:

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$M(X)= -5\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Напишем закон распределения квадрата случайной величины X^2 :

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)= 25\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}3+ 9\cdot 0{,}1+ 16\cdot 0{,}2 = 15{,}3.$$

Определим дисперсию:

$$D(X)= M(X^2) - [M(X)]^2 = 15{,}3 - [-0{,}3]^2 = 15{,}21.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9.$$

Определим моду: значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность p=0,4, составляет $Mo= -5$.

4. ЦЕНТРИРОВАННЫЕ И СТАНДАРТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. Пусть случайная величина X имеет ряд распределения:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется отклонением или **центрированной случайной величиной**: $\overset{0}{X} = X - M(X)$.

Ряд распределения центрированной случайной величины имеет вид:

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	…	$x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	…	p_n

Свойства центрированной случайной величины:

1. Математическое ожидание отклонения равно 0:

$$M\left(\overset{0}{X}\right) = M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

2. Дисперсия отклонения случайной величины X от ее математического ожидания равна дисперсии самой случайной величины X:

$$D\left(\overset{0}{X}\right) = D(X - M(X)) = D(X) + D(M(X)) = D(X) + 0 = D(X).$$

Другими словами, дисперсия случайной величины и дисперсия ее отклонения равны между собой.

4.2. Если отклонение $X - M(X)$ разделить на среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, то получим безразмерную центрированную случайную величину, которая называется **стандартной (нормированной) случайной величиной**: $Z = \dfrac{X - M(X)}{\sigma(X)}$.

Свойства стандартной случайной величины:

1. Математическое ожидание стандартной случайной величины равно нулю: $M(Z)=0$.
2. Дисперсия стандартной случайной величины равна 1: $D(Z)=1$.

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В лотерее на 100 билетов разыгрываются две вещи, стоимости которых 210 и 60 у.е. Составьте закон распределения суммы выигрыша для лица, имеющего: а) 1 билет, б) 2 билета. Найдите числовые характеристики.
2. Два стрелка стреляют по мишени один раз. Случайная величина X – число очков, выбиваемых при одном выстреле первым стрелком, – имеет закон распределения:

X	1	2	3
P	0,1	0,3	?

Случайная величина $У$ – число очков, выбиваемых при одном выстреле вторым стрелком, – имеет закон распределения:

$У$	1	2	3
P	0,1	0,6	?

Найти закон распределения для случайной величины Z – суммы очков, выбиваемых обоими стрелками. Определить числовые характеристики.

3. Два стрелка стреляют по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Случайная величина X_1 – число попаданий первого стрелка, X_2 – число попаданий второго стрелка. Найти закон распределения: а) общего числа попаданий; б) случайной величины $Z=3X_1 - 2X_2$. Определить числовые характеристики общего числа попаданий. Проверить выполнение свойств математического ожидания и дисперсии: $M(3X-2Y)=3M(X)-2M(Y)$, $D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)$.

4. Случайная величина X – выручка фирмы – имеет закон распределения:

X	3	4	5
P	1/3	1/3	1/3

Случайная величина $У$ – затраты фирмы – имеет закон распределения:

$У$	1	2
P	0,5	0,5

Найти закон распределения для случайной величины Z – прибыли фирмы. Определить ее числовые характеристики.

5. Случайные величины X и $У$ независимы и имеют один и тот же закон распределения:

Значение	1	2	4
P	0,2	0,3	0,5

Одинаковые ли законы распределения имеют случайные величины $2X$ и $X+У$?

6. Доказать, что математическое ожидание стандартной случайной величины равно нулю, а дисперсия равна 1.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая величина называется случайной?
2. Дайте определение дискретной случайной величины.
3. Что называется законом распределения случайной величины?
4. Что называется рядом распределения дискретной случайной величины?
5. Дайте определение функции распределения вероятностей и перечислите ее свойства.
6. Что называется математическим ожиданием и модой дискретной случайной величины?
7. Сформулируйте свойства математического ожидания.
8. Дайте определение дисперсии дискретной случайной величины.
9. Сформулируйте свойства дисперсии.
10. Что называется средним квадратическим отклонением случайной величины?
11. Какая случайная величина называется центрированной? Сформулируйте ее свойства.
12. Какая случайная величина называется стандартной (нормированной)?
13. Чему равны математическое ожидание и дисперсия стандартной случайной величины?

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – Изд.7-е, стер. – М.: Высш. шк. 2001.– 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – Изд.5-е, стер.– М.: Высш. шк. 2001. – 400 с.
3. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1991. – 157 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 . – 543 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Уч. изд. л. – 0,87.