Вычисление пределов

Методические указания к выполнению индивидуального задания №1
по Математическому анализу

При вычислении пределов функций используются следующие положения.

1) Свойства пределов:

а) $\lim C = C \quad (C - const)$;

б) $\lim Cf(x) = C \cdot \lim f(x)$;

в) $\lim(u(x) + v(x) + \cdots) = \lim u(x) + \lim v(x) + \cdots$;

г) $\lim(u(x) \cdot v(x) \cdot \ldots) = \lim u(x) \cdot \lim v(x) \cdot \ldots$;

д) $\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim u(x)}{\lim v(x)}$.

Формулы б) – д) справедливы при условии, что пределы, стоящие в правых частях равенств, существуют, и что $\lim v(x) \neq 0$.

2) Правило вычисления предела функции:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

3) Правила раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ в том числе:

а) 1-й замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

б) 2-й замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Примечание: если при вычислении предела дроби числитель и знаменатель не являются одновременно бесконечно малыми или одновременно бесконечно большими, то можно пользоваться следующими правилами:

$\frac{a}{\infty} = 0$; $\quad \frac{a}{0} = \infty$; $\quad \frac{0}{a} = 0$; $\quad \frac{\infty}{a} = \infty$; $\quad \frac{0}{\infty} = 0$; $\quad \frac{\infty}{0} = \infty$,

где a – конечное число, 0 – бесконечно малая величина, ∞ - бесконечно большая величина.

4) Таблица эквивалентных бесконечно малых ($\propto \to 0$):

$\sin \propto \sim \propto$;	$\mathrm{tg} \propto \sim \propto$;	$\arcsin \propto \sim \propto$;
$\mathrm{arctg} \propto \sim \propto$;	$1 - \cos \propto \sim \frac{\propto^2}{2}$;	$a^\propto - 1 \sim \propto \ln a$;
$e^\propto - 1 \sim \propto$;	$\log_a(1+\propto) \sim \frac{\propto}{\ln a}$;	$\ln(1+\propto) \sim \propto$;
$(1+\propto)^n - 1 \sim n \cdot \propto$;	$\sqrt[n]{1+\propto} - 1 \sim \frac{\propto}{n}$;	$\sqrt{1+\propto} - 1 \sim \frac{\propto}{2}$

5) Правило Лопиталя:

$$\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim u'(x)}{\lim v'(x)}$$

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 1} \frac{8x^5 + 9x^3 - 15}{3x^7 - 11x^4 + 8x}$$

Решение. Подставим вместо *x* число, к которому стремится *x*, т.е. 1:

$$\lim_{x \to 1} \frac{8x^5 + 9x^3 - 15}{3x^7 - 11x^4 + 8x} = \frac{8 \cdot 1^5 + 9 \cdot 1^3 - 15}{3 \cdot 1^7 - 11 \cdot 1^4 + 8 \cdot 1} = \frac{2}{0} = \infty$$

Ответ: ∞

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{x^4 - 25x^2}$$

Решение. Подставим вместо *x* число, к которому стремится *x*, т.е. 5:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{x^4 - 25x^2} = \frac{5^2 + 2 \cdot 5 - 35}{5^4 - 25 \cdot 5^2} = \frac{0}{0}$$

Получили неопределенность $\frac{0}{0}$, которую необходимо раскрыть, выделив в числителе и знаменателе «нулевой» множитель и сократив его.

Разложим на множители числитель через корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена по известной формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$:

$x^2 + 2x - 35 = 0$ => $x_1 = -7$; $x_2 = 5$. Так как коэффициент при x^2 равен 1 ($a = 1$), получаем для числителя:

$$x^2 + 2x - 35 = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 7)(x - 5)$$

Разложим на множители знаменатель:

$$x^4 - 25x^2 = x^2(x^2 - 25) = x^2(x - 5)(x + 5)$$

Подставив полученные выражения в исходный предел и сократив общий множитель, получим:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{x^4 - 25x^2} = \lim_{x \to 5} \frac{(x + 7)(x - 5)}{x^2(x - 5)(x + 5)} = \lim_{x \to 5} \frac{(x + 7)}{x^2(x + 5)} = \frac{(5 + 7)}{5^2(5 + 5)} = \frac{12}{250} = \frac{6}{125}$$

Ответ: $\frac{6}{125}$.

Пример 3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^7+13x^3-15}{6x^7+11x^2+7x}$$

Решение. Подставив вместо *x* число, к которому стремится *x*, т.е. ∞, получим неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия этой неопределенности разделим числитель и знаменатель на старшую степень *x*, которая есть в данной дроби, т.е. на x^7:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^7+13x^3-15}{6x^7+11x^2+7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{12x^7}{x^7}+\frac{13x^3}{x^7}-\frac{15}{x^7}}{\frac{6x^7}{x^7}+\frac{11x^2}{x^7}+\frac{7x}{x^7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{12+\frac{13}{x^4}-\frac{15}{x^7}}{6+\frac{11}{x^5}+\frac{7}{x^6}}=\frac{12+\frac{13}{\infty}-\frac{15}{\infty}}{6+\frac{11}{\infty}+\frac{7}{\infty}}=\frac{12+0-0}{6+0+0}$$

$$=\frac{12}{6}=2$$

Ответ: 2.

Пример 4. Вычислить предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}^2 4x}{x\cdot\sin 12x}$$

Решение. Подставив вместо *x* число, к которому стремится *x*, т.е. 0, получим неопределенность $\frac{0}{0}$, т.к. $\mathrm{tg}\,0=0$ и $\sin 0=0$.

Для раскрытия этой неопределенности используем 1-й замечательный предел в виде

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin kx}{kx}=1$$

Учтем также, что $\lim_{x\to0}\cos kx=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}^2 4x}{x\cdot\sin 12x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2 4x}{\cos^2 4x}}{x\cdot\sin 12x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2 4x}{1^2}}{x\cdot\sin 12x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 4x}{x\cdot\sin 12x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2\cdot(4x)^2}{x\cdot\frac{\sin 12x}{12x}\cdot 12x}=\cdots$$

Так как $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}=1$ и $\lim_{x\to0}\frac{\sin 12x}{12x}=1$, с учетом сокращения *x* получим:

$$\ldots=\lim_{x\to0}\frac{1^2\cdot(4x)^2}{x\cdot1\cdot12x}=\lim_{x\to0}\frac{16x^2}{12x^2}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Пример 5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x+5}\right)^{2x-3}$$

Решение. Подставив вместо x число, к которому стремится x, т.е. ∞, получим неопределенность 1^{∞}.

Для раскрытия этой неопределенности преобразуем основание степени, затем проведем замену переменной и используем 2-й замечательный предел в виде

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

В соответствии с изложенной последовательностью решение имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x+5}\right)^{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5+3}{x+5}\right)^{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+5}+\frac{3}{x+5}\right)^{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+5}\right)^{2x-3}=\cdots$$

Проведем замену переменной, подставив вместо второго слагаемого в скобках выражение $\frac{1}{t}$, и выразим x через t :

$$\frac{3}{x+5}=\frac{1}{t}\quad=>\quad x+5=3t\quad=>\quad x=3t+5\,;$$

$$x\to\infty\quad=>\quad t\to\infty$$

Получим новый предел:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2(3t+5)-3}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t+7}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{7}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{7}$$

$$=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{6}\cdot 1^{7}=e^{6}\cdot 1^{7}=e^{6}$$

Ответ: e^{6} .

Пример 6. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x^{2}\cdot \operatorname{tg}5x}{\sqrt{1+20x^{3}}-1}$$

Решение. Подставив вместо x число, к которому стремится x, т.е. 0, получим неопределенность $\frac{0}{0}$.

Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых:

при $x\to 0$ $\quad\arcsin 3x^{2}\sim 3x^{2}$, $\quad\operatorname{tg}5x\sim 5x$, $\quad\sqrt{1+20x^{3}}-1\sim 20x^{3}$.

Получим новый предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^{2}\cdot 5x}{20x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{15x^{3}}{20x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{15}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Пример 7. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+3x-1}{x^3}$$

Решение. Подставив вместо *x* число, к которому стремится *x*, т.е. 0, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+3x-1}{x^3}=\frac{e^0+3\cdot 0-1}{0^3}=\frac{0}{0}$$

Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\lim u'(x)}{\lim v'(x)}$$

Дифференцируем по отдельности числитель и знаменатель до тех пор, пока не исчезнет неопределенность:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+3x-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+3x-1)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+3}{3x^2}=\frac{e^0+3}{3\cdot 0^2}=\frac{4}{0}=\infty$$

Ответ: ∞ .