МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Высшая математика»

Составители: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2019

1. ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторный анализ (комбинаторика) - раздел математики, который изучает способы составления комбинаций из элементов (объектов, предметов, цифр и т.п.).

1.1. Пусть дано **одно исходное множество**, состоящее из k различных элементов. Выберем из него другое множество, содержащее r элементов, или, как говорят, сделаем выборку объемом r. Сколькими способами это можно сделать? Сколько таких выборок можно составить?

Обозначим через N - число различных выборок объемом r из исходного множества, содержащего k элементов. Возможны два варианта составления выборки:

1.1.1. Элементы в выборке могут повторяться (среди элементов выборки могут быть одинаковые);

1.1.2. Элементы в выборке не могут повторяться (состав выборок разный).

Рассмотрим более подробно эти случаи.

1.1.1. Элементы выборки могут повторяться

В этом случае один и тот же элемент исходного множества может входить в выборку до r раз. Выбирая первый элемент, можно выбрать любой из k имеющихся. При выборе второго также можно выбрать k элементов и так далее.

Например, пусть дано множество из трех цифр 1, 2, 3. Сколько можно составить комбинаций из двух цифр? Другими словами, сколько можно составить двухзначных чисел? Таких комбинаций всего будет девять: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. Первой мы можем выбрать любую из трех цифр. Второй - также любую из трех цифр. Тогда $N=3\cdot3=3^2=9$.

Теорема 1. Если элементы выборки могут повторяться, то общее число различных выборок равно **числу размещений с повторениями** N_k^r из k элементов по r:

$$N= N_k^r = k^r. \tag{1}$$

ПРИМЕР 1.1. Сколько различных комбинаций из трех букв можно составить из 33 букв алфавита?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 33 букв, выборка - из 3 букв. Элементы выборки могут повторяться, поэтому:

$$N= N_{33}^3 = 33^3=35937.$$

ПРИМЕР 1.2. Сколько существует различных семизначных номеров?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 10 цифр, выборка - из 7 цифр. Элементы выборки могут повторяться, поэтому:

$$N= N_{10}^7 = 10^7.$$

ПРИМЕР 1.3. Игральный кубик бросают два раза. На выпавших гранях две цифры образуют двузначное число. Сколько различных двузначных чисел можно получить?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 6 цифр {1, 2, 3, 4, 5, 6 очков}, выборка - из 2 цифр. Элементы выборки могут повторяться, поэтому:

$$N= N_6^2 = 6^2=36.$$

ПРИМЕР 1.4. Монету подбрасывают 10 раз. Сколько существует различных комбинаций выпадения орла и решки?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 2 элементов {орел, решка}, выборка - из 10 элементов. Элементы выборки могут повторяться, поэтому:

$$N= N_2^{10} = 2^{10}=1024.$$

ПРИМЕР 1.5. Батарея из 6 орудий ведет огонь по 10 самолетам. Сколько существует вариантов стрельбы, если предположить, что огонь ведется несогласованно?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 10 самолетов, выборка - из 6 самолетов. Элементы выборки могут повторяться, так как предполагаем, что орудия могут выбрать одинаковые самолеты, поэтому:

$$N = N_{10}^{6} = 10^{6}.$$

1.1.2. Элементы выборки не могут повторяться

В этом случае выборки могут отличаться друг от друга либо порядком, в котором выбираются элементы, либо самими элементами (составом элементов).

Например, из трех цифр 1, 2, 3 можно выбрать следующие комбинации из двух элементов: 12, 13, 21, 23, 31, 32.

В качестве первого элемента подобной выборки можно взять любой из k элементов исходного множества, но при выборе второго - уже $(k-1)$ элементов, третьего - $(k-2)$ элементов,…, r-го - $(k-(r-1))$ элементов. Таким образом, число различных выборок можно определить следующим образом:

$$N = k(k-1)(k-2)\dots(k-(r-1)). \qquad (2)$$

Такие комбинации называются размещениями без повторений и обозначаются символом A_k^r. Выражение (2) можно упростить, умножив и разделив его на $(k-r)!$. Тогда получим:

$$A_k^r = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-r+1)(k-r)!}{(k-r)!} = \frac{k!}{(k-r)!}.$$

Теорема 2. Если элементы выборки повторяться не могут, а сами выборки отличаются либо порядком, либо составом, то общее число различных выборок равно **числу размещений без повторений A_k^r** из k элементов по r:

$$N = A_k^r = \frac{k!}{(k-r)!}. \qquad (3)$$

ПРИМЕР 1.6. Сколько различных комбинаций из трех букв можно составить из букв слова "ромб", если каждую букву можно использовать только один раз?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 4 букв, выборка - из 3 букв. Элементы выборки не могут повторяться, поэтому:

$$N= A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} =24.$$

ПРИМЕР 1.7. Сколько можно составить трехзначных чисел из нечетных цифр, если: а) каждую цифру можно использовать только один раз; б) если цифры могут повторяться?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 5 нечетных цифр $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, выборка - из 3 цифр.

а) Если элементы выборки не могут повторяться, то:

$$N= A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2!} =60.$$

б) Если элементы выборки могут повторяться, то:

$$N= N_5^3 = 5^3=125.$$

Рассмотрим **частные случаи размещений**:

Первый случай. Все возможные выборки могут состоять из одних и тех же элементов и отличаться друг от друга только порядком размещения элементов, то есть $r=k$. Тогда общее число выборок можно определить следующим образом:

$$N = A_k^k = \frac{k!}{(k-k)!} = \frac{k!}{0!} = \frac{k!}{1} = k!.$$

Такие комбинации называются перестановками и обозначаются символом P_k .

Теорема 3. Если выборки состоят из одних и тех же элементов и отличаются друг от друга только порядком, то общее число различных выборок равно **числу перестановок** из k элементов:

$$N = P_k = k! \qquad (4)$$

ПРИМЕР 1.8. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, если: а) каждую цифру можно использовать только один раз; б) если цифры могут повторяться?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 3 цифр, выборка - также из 3 цифр.

а) Если элементы выборки не могут повторяться, то:

$$N = P_3 = 3! = 6.$$

б) Если цифры могут повторяться, то:

$$N = N_3^3 = 3^3 = 27.$$

ПРИМЕР 1.9. Сколькими способами можно расставить на полке 10 книг?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество и выборка состоят из 10 книг. Тогда:

$$N = P_{10} = 10! = 3628800.$$

ПРИМЕР 1.10. Сколькими способами можно рассадить четырех человек в четырехместной каюте?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество и выборка состоят из 4 элементов. Тогда:

$$N = P_4 = 4! = 24.$$

Второй случай. Рассмотрим выборки, в которых порядок размещения элементов не имеет значения, а сами выборки отличаются друг от друга только составом. Тогда общее число выборок можно определить следующим образом:

$$N = \frac{A_k^r}{P_r} = \frac{k!}{r!(k-r)!}.$$

Такие комбинации называются сочетаниями и обозначаются символом C_k^r.

Теорема 4. Если элементы выборки не повторяются, порядок размещения элементов в выборке не имеет значения, а выборки отличаются только составом, то общее число различных выборок равно **числу сочетаний** из k элементов по r:

$$N = C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}. \qquad (5)$$

Надо уметь отличать сочетания от размещений. Например, пусть в группе 25 студентов. Пять человек вышли из аудитории на перерыв. Сколько всех возможных групп из 5студентов, выбранных из 25 человек, можно составить?

Если 5 человек стоят в коридоре и беседуют, то совершенно неважно в каком порядке они стоят. Число всех возможных групп из 5 человек, выбранных из 25 человек, равно числу сочетаний из 25 по 5:

$$N = C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = 53130.$$

Если же студенты отправились в перерыве в буфет, то тогда важно, в каком порядке они стоят в очереди. Число всех возможных групп из 5 человек, выбранных из 25 человек, с учетом их размещения в очереди равно числу размещений из 25 по 5:

$$N = A_{25}^5 = \frac{25!}{(25-5)!} = 6375600.$$

Свойства сочетаний:

1) $C_k^0 = C_k^k = 1;$

2) $C_k^1 = k;$

3) $C_k^r = C_k^{k-r} \qquad (r > k/2);$

4) $C_{k+1}^{r+1} = C_k^r + C_k^{r+1} \qquad (0 \le r \le k).$

ПРИМЕР 1.11. Сколькими способами можно выбрать три шара из пяти?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 5 шаров, выборка - из 3 шаров. Порядок, в котором мы выбираем шары, значения не имеет, поэтому:

$$N= C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} =10.$$

ПРИМЕР 1.12. Тринадцать студентов обменялись рукопожатиями. Сколько всего сделано рукопожатий?

РЕШЕНИЕ. Исходное множество состоит из 13 студентов, выборка - из 2 человек, поэтому:

$$N= C_{13}^2 = \frac{13!}{2!(13-2)!} =78.$$

1.2. Пусть даны **два исходных множества**, состоящих из k_1 и k_2 различных элементов. Необходимо определить число различных выборок N, составленных из элементов двух исходных множеств. В этом случае сначала делают выборку из одного множества и определяют N_1 - число различных выборок, составленных из элементов первого исходного множества. Затем делают выборку из другого множества и определяют N_2. Тогда общее число выборок:

$$N=N_1 \cdot N_2, \qquad (6)$$

где N_1 и N_2 определяют по формулам (1), (3)-(5) в зависимости от конкретного смысла задачи.

ПРИМЕР 1.13. Из десяти красных роз и 8 белых роз нужно составить букет, содержащий две красных и три белых розы. Сколько можно составить таких букетов?

РЕШЕНИЕ. Одно исходное множество состоит из 10 красных роз, выборка - из 2 роз. Порядок, в котором мы выбираем розы, значения не имеет, поэтому:

$$N_1= C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 8!} = 45.$$

Другое исходное множество состоит из 8 белых роз, выборка - из 3 роз, поэтому:

$$N_2 = C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} = 56.$$

Тогда общее количество букетов $N = N_1 \cdot N_2 = 45 \cdot 56 = 2520$.

ПРИМЕР 1.14. В урне лежат 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

РЕШЕНИЕ. Одно исходное множество состоит из 10 белых шаров, выборка - из 4 белых шаров. Порядок, в котором мы выбираем шары, значения не имеет, поэтому:

$$N_1 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6!} = 210.$$

Другое исходное множество состоит из 5 черных шаров, выборка - из 3 шаров, поэтому:

$$N_2 = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 1 \cdot 2} = 10.$$

Тогда общее количество способов $N = N_1 \cdot N_2 = 210 \cdot 10 = 2100$.

ПРИМЕР 1.15. Сколькими способами можно расставить на полке девять различных книг, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

РЕШЕНИЕ. Будем считать определенные 4 книги за одну. Тогда первое исходное множество состоит из 6 книг, выборка - также из 6 книг, т.е. исходное множество и выборка состоят из одних и тех же элементов. Эти шесть книг можно расставить на полке в разном порядке, поэтому:

$$N_1 = P_6 = 6! = 720.$$

Другое исходное множество состоит из четырех определенных книг, выборка - из тех же книг, которые можно по-разному переставить между собой, поэтому:

$$N_2 = P_4 = 4! = 24.$$

Тогда общее количество способов расстановки книг N=N_1·N_2=720·24=17280.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ

Вероятность события A равна отношению числа исходов испытания m, в которых может появиться событие A, к общему числу n всех элементарных исходов испытания, образующих полную группу:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

ПРИМЕР 2.1. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой. Какова вероятность получить слова: а) "тор"; б) "теория"?

РЕШЕНИЕ. а) Пусть событие A - получение слова "тор". Элементарным исходом испытания является извлечение трех карточек из шести. Общее число всех исходов испытания равно числу размещений из 6 по 3, так как различные выборки могут отличаться как составом, так и порядком:

$$n=A_6^3=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!}=120.$$

Слово "тор" можно получить только одним способом m=1. Тогда:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{120}.$$

б) Пусть событие B - получение слова "теория". Элементарным исходом испытания является получение различных комбинаций из шести букв. Общее число всех исходов испытания равно числу перестановок из 6, так как различные выборки могут отличаться друг от друга только порядком:

$$n = P_6 = 6! = 720.$$

Слово "теория" можно получить только одним способом m=1. Тогда:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}.$$

ПРИМЕР 2.2. Буква «а» написана на трех карточках, буква «н» - на двух карточках, буква «с» - на одной карточке. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой. Какова вероятность получить слово "ананас"?

РЕШЕНИЕ. Пусть событие A - получение слова "ананас". Как и в предыдущем случае, элементарным исходом испытания является получение различных комбинаций из шести букв. Общее число всех исходов испытания равно числу перестановок из 6, так как различные выборки могут отличаться друг от друга только порядком:

$$n = P_6 = 6! = 720.$$

Слово "ананас" можно получить не одним способом, так как перестановка трех букв «а» и двух букв «н» не меняет это слово. Три карточки с буквой «а» можно расставить 6 способами:

$$m_1 = P_3 = 3! = 6.$$

Две карточки с буквой «н» можно расставить 2 способами:

$$m_2 = P_2 = 2! = 2.$$

Карточку с буквой «с» можно расставить одним способом. Тогда: $m = m_1 m_2 m_3 = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$. Следовательно:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{720} = \frac{1}{60}.$$

ПРИМЕР 2.3. В урне находится 15 шаров, из них 9 красных и 6 синих. Какова вероятность того, что вынутые наугад два шара: а) оба красные; б) 1 красный, 1 синий?

РЕШЕНИЕ. а) Пусть событие A - извлечены два красных шара. Общее число всех исходов испытания равно числу способов, какими можно выбрать 2 шара из 15. Различные выборки могут отличаться друг от друга только составом (порядок не имеет значения), поэтому:

$$n = C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 13!} = 105.$$

Число случаев, благоприятствующих событию A, равно числу сочетаний из 9 красных шаров по 2:

$$m = C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 7!} = 36.$$

Следовательно:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{36}{105} = \frac{12}{35}.$$

б) Пусть событие B - извлечены один красный и один синий шар. Общее число всех исходов испытания, как и в предыдущем случае, равно n=105. Для того чтобы подсчитать число случаев, благоприятствующих событию B, необходимо выбрать 1 шар из 9 красных (одно исходное множество) и 1 шар из 6 синих (другое исходное множество). Тогда:

$$m = m_1 \cdot m_2 = C_9^1 C_6^1 = 9 \cdot 6 = 54.$$

Следовательно:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{54}{105} = \frac{18}{35}.$$

ПРИМЕР 2.4. В партии 50 деталей, из них 5 - бракованные. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки шести деталей две окажутся бракованными?

РЕШЕНИЕ. Пусть событие A - выбраны 2 бракованные детали и 4 небракованные. Общее число всех исходов испытания равно числу способов, какими можно выбрать 6 деталей из 50. Различные выборки могут отличаться друг от друга только составом (порядок не имеет значения), поэтому:

$$n = C_{50}^{6} = \frac{50!}{6!(50-6)!} = \frac{44!\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 44!} = 15890700.$$

Для того чтобы подсчитать число случаев, благоприятствующих событию A, необходимо выбрать 2 детали из 5 бракованных (одно исходное множество) и 4 детали из 45 небракованных (другое исходное множество). Тогда:

$$m = m_1\cdot m_2 = C_5^2 C_{45}^4 = \frac{5!}{2!(5-2)!}\cdot\frac{45!}{4!(45-4)!} = 1489950.$$

Следовательно:

$$P(B) = \frac{m}{n} = 0{,}09.$$

ПРИМЕР 2.5. В лифт на первом этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека, каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже с первого по девятый. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на шестом этаже; б) на одном этаже?

РЕШЕНИЕ. а) Пусть событие A - все пассажиры выйдут на шестом этаже. Каждый пассажир может выйти на восьми этажах (со второго по девятый этаж), то есть исходное множество состоит из 8 этажей. Выборка равна 4 этажам. Тогда общее число всех исходов испытания равно числу размещений с повторениями, так как элементы выборки могут повторяться (например, все четыре человека могут выйти на одном и том же этаже). Поэтому:

$$n = N_8^4 = 8^4 = 4096.$$

Число случаев, благоприятствующих событию A, равно m=1.

Следовательно:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4096} = 0{,}00024.$$

б) Пусть событие B - все пассажиры выйдут на одном этаже. Теперь событию В будут благоприятствовать m=8 случаев (все пассажиры выйдут или на втором этаже, или на третьем, …, или на девятом этаже). Следовательно:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{8}{4096}=0{,}00195.$$

ПРИМЕР 2.6. В партии 100 изделий, из них 4 - бракованные. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные детали достанутся: а) одному потребителю; б) обоим потребителям поровну?

РЕШЕНИЕ. а) Пусть событие A - все бракованные изделия достанутся одному потребителю. Общее число всех исходов испытания равно числу способов выбрать 50 изделий из 100, то есть:

$$n = C_{50}^{6} = \frac{100!}{50!(100-50)!} = \frac{100!}{50!\cdot 50!}.$$

Событию A благоприятствуют случаи, когда из 50 изделий, отправленных одному потребителю, будет либо 46 стандартных из 96 и все 4 бракованных изделия, либо 50 стандартных из 96:

$$m = m_1\cdot m_2 + m_3\cdot m_4 = C_{96}^{46}C_4^4 + C_{96}^{50}C_4^0 = 2C_{96}^{46} = \frac{96!}{46!\cdot 50!}.$$

.

Следовательно:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{96!\cdot 50!\cdot 50!}{46!\cdot 50!\cdot 100!}=\frac{2\cdot 96!\cdot 46!\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{46!\cdot 96!\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}=0{,}117.$$

б) Пусть событие B - в каждой партии по 2 бракованных изделия. Теперь событию В будут благоприятствовать случаи, когда из 50 изделий, отправленных одному потребителю, будут 48 стандартных из 96 и 2 бракованных из 4, то есть:

$$m = m_1\cdot m_2 = C_{96}^{48}C_4^2 = \frac{96!}{48!\cdot 48!}.$$

Следовательно:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{96!\cdot 4!\cdot 50!\cdot 50!}{48!\cdot 48!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 100!}=\frac{96!\cdot 2!\cdot 3\cdot 4\cdot (48!\cdot 49\cdot 50)^2}{(48!)^2\cdot 2!\cdot 96!\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}=0{,}383.$$

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых и расположенных “в одну линию” кубиках можно будет прочесть слово “спорт”. *Отв.* 1/120.
2. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырёх вынутых по одной и расположенных “в одну линию” карточках, можно будет прочесть слово “трос”. *Отв.* 1/ 360.
3. Слово "группа" составлено из карточек. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой. Найти вероятность того, что получится то же слово. *Отв*. 1/360.
4. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность - четырем; в) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение - четырем. *Отв*. а) 1/6; б) 1/18; в) 1/18.
5. В коробке шесть занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке. *Отв*. 1/720.
6. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными. *Отв*. 24/91.
7. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных. *Отв*. а) 0,65; б) 0,00005.
8. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная. *Отв*. 0,1.
9. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

Отв. 0,5.

10. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников. Отв. 14/55.

11. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие. *Отв*. а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.

12. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 руб. каждая, три книги по одному рублю и две книги - по 3 руб. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 руб. *Отв.* 1/3.

13. По условиям лотереи "Спортлото 6 из 45" случайно выбираются 6 видов спорта из 45. Участник лотереи, угадавший 4, 5 или все 6 видов спорта, получает денежный приз. Найти вероятность того, что будут угаданы: а) все 6 видов спорта; б) 4 вида спорта. *Отв*. а) 0,00000001; б) 0,00136.

14. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное число, цифры которого различны. *Отв*. а) 1/90; б) 1/81.

15. В секретном замке на общей оси расположены четыре диска. Каждый диск разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт. *Отв*. 0,0016.

16. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом. *Отв.* 0,25.

17. Подбрасывают три игральных кубика. Что вероятнее: выпадение в сумме 11 очков или 12?

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите два способа формирования выборок.
2. Как определить число различных выборок объемом r из исходного множества, содержащего k элементов, если элементы выборки могут повторяться?
3. Как определить число различных выборок объемом r из исходного множества, содержащего k элементов, если элементы выборки не могут повторяться и отличаются друг от друга и порядком, и составом?
4. Как определить число различных выборок объемом r из исходного множества, содержащего k элементов, если элементы выборки не могут повторяться, состоят из одних и тех же элементов ($k=r$) и отличаются друг от друга только порядком размещения элементов?
5. Как определить число различных выборок объемом r из исходного множества, содержащего k элементов, если элементы выборки не могут повторяться и отличаются друг от друга только составом?
6. Как определить число различных выборок, составленных из элементов двух исходных множеств?
7. Сформулируйте классическое определение вероятности события.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – Изд.7-е, стер. – М.: Высш. шк. 2001.– 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – Изд.5-е, стер.– М.: Высш. шк. 2001. – 400 с.
3. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1991. – 157 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 . – 543 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Высшая математика»

Уч.-изд.л. – 0,87   Тираж 50 экз.

Издательский центр МАТИ